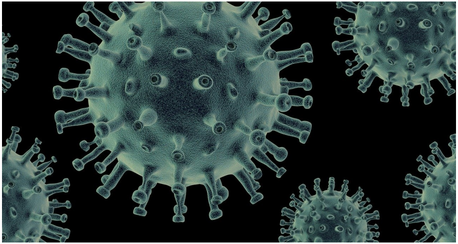
Wstęp do drzew dwumianowych.

19 maja 2020



Instrumenty finansowe

Instrument finansowy

Instrumentem finansowym nazywamy formę zobowiązania finansowego jednego podmiotu względem drugiego.

Dźwignia finansowa- uproszczona definicja

Dźwignia finansowa to działanie, które daje inwestorowi szansę na osiągnięcie większych zysków, ale jednocześnie naraża inwestora na większe straty, przy tych samych nakładach inwestycyjnych.

Inwestowanie w papiery wartościowe - przykład

Inwestor zamierza zainwestować 4000 zł. na pewnej giełdzie

- Inwestor zamierza kupić akcje firmy Ω niewypłacającej dywidendy po dzisiejszej cenie 113 j.p./sztukę;
- Za 3 miesiące zamierza sprzedać akcję, licząc za zysk, czyli liczy, że podrożeją;
- Inwestor nie zna ceny w przyszłości, ale ma pewne przypuszczenie
  1. **Wariant optymistyczny:** akcje będą kosztowały ok. 120 zł., sprzedaż oznacza zysk: $120 - 113 = 7/\mathit{sztuk}$.
  2. **Wariant pesymistyczny:** akcje kędą kosztowały ok. 110 zł., sprzedaż oznacza stratę: $110 - 113 = -3/\mathit{sztuk}$.

Opcje - narzędzie dźwigni finansowej

- Ponieważ inwestor sysponuje kwotą 4000 zł. może sobie pozwolić na zakup $4000/113 \approx 35$ akcji wydając $113 * 35 = 3955 j.p.$;

1. **Wariant optymistyczny:** sprzedaje akcję za 120 zł.:

Wydatek	Zysk ze sprzedaży	Bilans
3955	$120 * 35 = 4200$	245

2. **Wariant pesymistyczny:** akcje będą kosztowały ok. 110 zł., sprzedaż oznacza stratę $110 - 113 = -3/sztuk$.

Wydatek	Zysk ze sprzedaży	Bilans
3955	$110 * 35 = 3850$	-105

Inwestowanie w papiery wartościowe

- Zatem
  1. Wariant optymistyczny: inwestor zarobi ok 245 zł.
  2. Wariant pesymistyczny: inwestor straci ok 113 zł.
- Takie oczekiwnaie raczej nie zachęcą inwestora do takiej inwestycji, ponieważ
  1. ewentualny zysk 245 zł. przy nakładach 3955 zł. nie satysfakcjonuje inwestora.
  2. ewentualna strata 113 nie jest jednak dotkliwa.
- Zatem inwestor
  1. nie może liczyć na satysfakcjonujący go zysk;
  2. nie obawia się dotkliwych strat;
- Zatem inwestor będzie skłonny poszukać sposobów na zastosowanie dźwigni finansowej. Przykładem takiego instrumentu jest opcja.

Opcja

Opcja kupna

Opcja kupna to instrument finansowy dający posiadaczowi prawo do zakupu od wystawcy opcji określonego aktywa w określonym terminie lub przedziale czasowym po ściśle określonej cenie niezależnie od uwarunkowań rynkowych. W zamian za to prawo posiadacz opcji płaci posiadaczowi **premię opcyjną** (cena opcji).

Opcja sprzedaży

Opcja sprzedaży to instrument finansowy dający posiadaczowi prawo do sprzedaży wystawcy opcji określonego aktywa w określonym terminie lub przedziale czasowym po ściśle określonej cenie niezależnie od uwarunkowań rynkowych. W zamian za to prawo posiadacz opcji płaci posiadaczowi **premię opcyjną** (cena opcji).

Parametry opcji

- Wystawca emituje opcję kupna lub sprzedaży danego aktywa, które dzisiaj kosztuje S;
- Inwestor kupuje
  1. opcję kupna po cenie c;
  2. lub sprzedaży po cenie p;
- W zamian za to inwestor nabywa prawo
  1. **wykonania opcji kupna**, czyli zakupu aktywa po cenie X w momencie T, lub;
  2. **wykonania opcji sprzedaży**, czyli zakupu sprzedaży po cenie X w momencie T;
- Stopa wolna od ryzyka wynosi r w kapitalizacji ciągłe: każda jednostka pieniężna pożyczona w okresie zerowym jest warta e^{rT} w okresie T:

Stopa wolna od ryzyka

- Jeśli ulokuję K zł. mam Ke^{rT} oszczędności po czasie T;
- Jeśli pożyczę K zł. mam Ke^{rT} długu do spłacenia po czasie T;
- Zatem by po czasie T mieć K zł. oszczędności, muszę zainwestować Ke^{-rT} w okresie zerowym;
- Stopa wolna od ryzyka niekiedy utożsamiana jest ze stopą oprocentowania bonów skarbowych, czyli obligacji zerokuponowych:
    - Państwo to wiarygodny pożyczkobiorca, więc pożyczka jest pozbawiona ryzyka, stąd nazwa.

Podział opcji

- **Opcje amerykańskie** - wykonanie opcji jest możliwe nie tylko w terminie wykonania opcji T, ale również przed terminem;
- **Opcje europejskie** - wykonanie opcji jest możliwe wyłącznie w terminie wykonania opcji;

Przykład

Rozpatrzmy przykład tego samoego inwestora, który chce zainwestować 4000 zł. w akcje firmy Ω po cenie 113 zł. Ale zakup 35 akcji firmy Ω po cenie dzisiejszej 113 zł. daje oczekiwany zysk 245 zł. i ryzyko straty 105 zł. Ponieważ taki zysk go nie satysfakcjonuje i jest jest gotowy zaryzykować większymi stratami, postanowił zainwestować w trzymiesięczne europejskie opcje sprzedaży akcji po cenie wykonania 115 zł. Cena pojedynczej opcji wynosi 5 zł. Zatem inwestor kupi $4000/5 = 800$ opcji kupna akcji. Załóżmy, że podobnie jak poprzednio możliwe są dwa warianty: cena akcji za trzy miesiące wyniesie 120 zł. lub 110 zł. (VERTE)

Dźwignia finansowa na opcjach

Przykład CD

1. **Cena akcji skoczy do 120 zł:** cena rynkowa akcji wyniesie 120 zł, a cena wykonania 115 zł. Nabywca ma prawo wyboru: wykonać opcję i sprzedać akcję wystawcy po cenie 115 zł., lub tego nie robić. Nie wykona opcji, bo to mu się nie opłaca. Na rynku sprzedałby po 120. Jego bilans to -4000 zł., bo tyle zainwestował w zakup wszystkich opcji.
2. **Cena akcji spadnie do 110 zł:** cena rynkowa akcji wyniesie 110 zł, a cena wykonania 115 zł. Nabywca ma prawo wyboru: wykonać opcję i sprzedać wystawcy opcji akcję po cenie 115 zł., lub tego nie robić. Ale nabywca to zrobi:
   - najpierw nabywca opcji kupi akcję po cenie rynkowej 110 zł. i sprzeda wystawcy opcje po cenie 115, tak jak się umawiali na początku. Uprzednio zainwestował 4000 zł. w opcje zatem:

$$\text{Bilans} = 800*115 - 800*100 - 4000 = 15*800 - 4000 = 8000 \text{ zł.}$$

Przykład CD

- NAbycie opcji to przykład **dźwigni finansowej**: tu jest szansa na zarobek 8000 zł. (zamiast 245 zł.) ale ryzyko utraty wszystkich oszczędności (zamiast 105 zł.)
- Dźwignia finansowa to z jednej strony szansa na większe zyski w przyszłości, ale i ryzyko większych strat.

Dźwignia finansowa na opcjach - podsumowanie przykładu inwestora

Tabela pokazuje jak działa dźwignia finansowa w przypadku opcji:

Strategia	Cena 120 zł.	Cenie 110 zł.
Kupić 35 akcji	Bilans=+245	Bilans=-105
Kupić 800 opcji sprzedaży	Bilans=-4000	Bilans=+8000

Podstawowe fakty z matematyki finansowej

Aby nie było możliwości arbitrażowych, czyli osiągnięcia zysku bez ryzyka, ceny opcji kupna i sprzedaży muszą odzwierciedlać bieżące i przyszłe wartości:

Granice wartości cen opcji

Ceny opcji kupna muszą kształtować się w przedziale:

$$\max(S - Xe^{-rT}, 0) \leq c \leq S.$$

Ceny opcji sprzedaży muszą kształtować się w przedziale:

$$\max(Xe^{-rT} - S, 0) \leq p \leq Xe^{-rT}.$$

Parytet opcji kupna i sprzedaży

$$p + S = c + Xe^{-rT}.$$

Wycena opcji

- Prawidłowy algorytm wyceny opcji kupna i sprzedaży musi brać pod uwagę podane ograniczenia;
- Jednym z takich algorytmów jest algorytm drzew dwumianowych Coxa, Rossa i Rubinsteina;
- Innym algorytmem jest algorytm Blacka-Scholesa.

Jednookresowe drzewa dwumianowe

Założenia

- Dzisiaj aktywo kosztuje S;
- Cena wykonania opcji (kupna lub sprzedaży) wynosi X;
- Termin wykonania opcji europejskiej wynosi T;
- Stopa wolna od ryzyka wynosi r;
- Przyjmijmy dodatkowe założenie, że w okresie wykonania opcji cena aktywa przyjmie jedną z dwóch wartości $S * u$ lub $S * d$, gdzie $d < 1 < u$.

Cel

Za pomocą algorytmu drzew dwumianowych Coxa, Rossa i Rubinsteina znaleźć niearbitrażową cenę opcji kupna (c) lub sprzedaży (p).

Konstrukcja ceny opcji - idea

- Inwestor sprzedaje opcję kupna z pokryciem, tzn. kupuje aktywo żeby mógł wywiązać się z opcji, czyli sprzedać aktywo gdyby nabywca sobie tego zażyczył;
- W zależności od wariantu cenowego (czyli czy nabywca wykona opcje czy nie), inwestor może ponieść różne straty (lub osiągnąć różne zyski);
- Inwestor może jednak dokupić kolejne akcje, lub opcje, tak aby oczekiwany zysk (strata) nie zależał od wariantu cenowego;
- Tak skonstruowany portfel to **portfel wolny od ryzyka**.

Portfel wolny od ryzyka - ilustracja

Inwestor kupuje Δ akcji po cenie $S = 20z$ za każdą akcję i sprzedaje **jedną** europejską opcję kupna na tą akcję po cenie wykonania $X = 21$ w terminie wykonania $T = 1/4$. Przyjmijmy, że w terminie wykonania opcji (inaczej w momencie wygasnięcia opcji) cena akcji wyniesie 22 lub 18. Znajdź wartość Δ, aby portfel był wolny od ryzyka, a wiec żeby jego wartość w momencie wygaśnięcia była taka sama dla obu wariantów cenowych. Oblicz niearbitrażową cenę opcji c gdy stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 0.12$.

Instrumenty są tyle warte ile mogą przynieść zysku

Cena akcji = 22
Cena opcji =1

Cena akcji=20
Cena opcji=c=?

Cena akcji = 18
Cena opcji = 0

Rozwiązanie

Inwestor posiada Δ akcji i sprzedał jedną opcję kupna. W przyszłości sprzeda wszystkie akcje: być może jedną w ramach opcji, a pozostałe akcje po cenie rynkowej. Jego portfel jest tyle wart ile jest w stanie przynieść zysków. Zależy od przypadków:

1. Nabywca wykona opcję;
2. Nabywca nie wykona opcji;

Celem jest dopasowanie Δ (nie musi być całkowita) tak, aby wartość portfela nie zależała od wariantu.

Rozwiązanie CD

W momensie wygaśnięcia opcji:

- gdy cena akcji wyniesie 18 zł. posiadacz opcji nie wykona jej, bo nie kupi aktywa za 21 zł. więc wystawca opcji sprzeda wszystkie akcje po cenie rynkowej 18:

$$\text{Wartość portfela} = 18\Delta$$

- gdy cena akcji wyniesie 21 zł. posiadacz opcji wykona ją i kupi aktywo za 21 zł. Zatem inwestor sprzeda jedno aktywo za 21 zł. i pozostałe $\Delta - 1$ aktywów za 22 czyli po cenie rynkowej:

$$\text{Wartość portfela} = 21 + 22(\Delta - 1) = 22\Delta - 1.$$

Rozwiązanie CD

Aby portfel był wolny od ryzyka, bilans powinien być równy dla obu wariantów

$$18\Delta = 22\Delta - 1 \Leftrightarrow \Delta = 1/4.$$

Wartość portfela wolnego od ryzyka w momencie $T = 1/4$ wynosi:

$$18 * 1/4 = 22 * 1/4 - 1 = 4,5$$

Rozwiązanie CD

W momencie zerowym wartość portfela jest zdyskontowana przez czynnik $e^{-rT} = e^{-0.12*1/4}$, czyli mamy

$$4,5 * e^{-0.12*1/4} = 4.367.$$

Z drugiej strony kupując $\Delta = 1/4$ akcji po cenie $S = 20$ i sprzedając opcję za c inwestor uzyskał:

$$c - 20 * \Delta = c - 20 * 1/4 = c - 5.$$

Mamy więc

$$c - 5 = 4.367 \Leftrightarrow c = 0.633.$$

Wtedy arbitraż jest niemożliwy.

Jednookresowe drzewa dwumianowe

Uogólnienie można zapisać jako drzewo dwumianowe:

Cena akcji = S*u
Cena opcji =f_u

Cena akcji=S
Cena opcji=?

Cena akcji = S*d
Cena opcji = f_d

Jednookresowe drzewa dwumianowe

Szczególny przypadek w poprzednim przykładzie:

Cena akcji = S*u=22
Cena opcji =$f_u = 22 - 21 = 1$

Cena akcji=20
Cena opcji=?

Cena akcji = S*d=18
Cena opcji = $f_d = 0$

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna

- Kupimy Δ akcji po cenie S i sprzedamy jedna opcję kupna po szukanej cenie c;
- Po czasie T:
  1. Gdy cena osiągnie $S * u$, zysk z posiadania opcji to f_u (w przykładzie było to 1, bo opcja była wykonana, a posiadacz mógł zarobić na niej 1 - różnicę między ceną rynkową a ceną wykonania);
  2. Gdy cena osiągnie $S * d$, zysk z posiadania opcji to f_d (w przykładzie było to 0 bo nabywca nie wykona opcji, więc w takich okolicznościach opcja jest nic nie warta);

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna CD

- Wartość portfela wolnego od ryzyka w różnych wariantach:
  1. Gdy cena osiągnie $S * u$:
  $$S * u\Delta - f_u$$
  2. Gdy cena osiągnie $S * d$:
  $$S * d\Delta - f_d$$
- Aby portfel był wolny od ryzyka obie wartości muszą być równe
$$S * u\Delta - f_u = S * d\Delta - f_d \Leftrightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S * u - S * d}.$$

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna (CD)

- Wartość portfela wolnego od ryzyka w różnych wariantach:
  1. Gdy cena osiągnie $S * u$:
  $$S * u\Delta - f_u$$
  2. Gdy cena osiągnie $S * d$:
  $$S * d\Delta - f_d$$
- Aby portfel był wolny od ryzyka obie wartości muszą być równe
$$S * u\Delta - f_u = S * d\Delta - f_d \Leftrightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S * u - S * d}.$$

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna (CD)

- Wartość portfela wolnego od ryzyka w przyszłości wynosi:

$$S * u\Delta - f_u = S * d\Delta - f_d \quad \text{dla} \quad \Delta = \frac{f_u - f_d}{S * u - S * d}.$$

- Koszt skonstruowanego portfela to zakup akcji minus zysk z wydania opcji:

$$S\Delta - c.$$

- Koszt i zdyskontowana wartość muszą się pokrywać: dla $\Delta =$

$$S\Delta - c = (S * u\Delta - f_u)e^{-rT} \Leftrightarrow c = S\Delta - (S * u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna (CD)

Przyjmując

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S*u - S*d}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} c &= S\Delta - (S*u\Delta - f_u)e^{-rT} \\ &= S\frac{f_u - f_d}{S*u - S*d} - \left(S*u\frac{f_u - f_d}{S*u - S*d} - f_u\right)e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{u-d} - \left(u\frac{f_u - f_d}{u-d} - f_u\right)e^{-rT} \\ &= e^{-rT}\left(\frac{e^{rT} - d}{u-d}f_u + \frac{u - e^{rT}}{u-d}f_d\right). \end{aligned}$$

Konstrukcja portfela wolnego od ryzyka - cena opcji kupna (CD)

Ostatecznie c wyrażamy wzorem

$$c = e^{-rT}\left(\alpha f_u + (1-\alpha) f_d\right)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Cena opcji sprzedaży, wyprowadzenie wzoru:

- Znając opcję kupna na to samo aktywo o cenie wykonania c za pomocą *parytetu opcji kupna i sprzedaży* można uzyskać cenę opcji sprzedaży
$$p = c + Xe^{-rT} - S.$$
- Można ewnetualnie stworzyć analogiczne drzewo dwumianowe i skonstruować następujący portfel wolny od ryzyka:
  1. Pożyczamy Δ akcji i natychmiast ją sprzedajemy na rynku (krótka sprzedaż);
  2. Sprzedajemy opcję sprzedaży;
  3. W momencie wygaśniecia opcji odkupujemy wszystkie akcje i oddajemy prawowitemu właścicielowi:
     1. Jeśli nabywca wykona opcję od niego odkupimy jedną akcję, a pozostałe na rynku;
     2. Jeśli nabywca nie wykona opcji, wszystkie akcje kupimy po cenie rynkowej;
  4. Wzór na cenę opcji będzie wtedy ten sam (zmienią się tylko wartości f_d i f_u.

Cena opcji-wzór

Niech f będzie ceną opcji kupna, lub sprzedaży, która

- dzisiaj kosztuje S;
- termin wygaśnięcia opcji to T;
- w terminie wygaśnięcia opcji cena akcji wyniesie $S * u$, a wartość opcji to f_u, lub $S * d$ a wartość opcji to f_d $(d < 1 < u)$;
- stopa wolna od ryzyka to r;
- wtedy cena opcji f wyraża się wzorem

$$f = e^{-rT}\left(\alpha f_u + (1-\alpha) f_d\right) \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Przykład

Wracamy do przykładu opcji kupna na aktywo kosztujące $S = 20$, możliwe przyszłe ceny to $S * u = 22$, $S * d = 18$, cena wykonania $X = 21$, termin wykonania opcji to $T = 1/4$, a stopa wolna od ryzyka $r = 0.12$. Sytuację podsumujemy na drzewie dwumianowym (VERTE).

Przykład

Szczególny przypadek w poprzednim przykładzie:

Cena akcji=20
Cena opcji=?

Cena akcji = S*u=22
Cena opcji =$f_u = 22 - 21 = 1$
(wykonanie opcji)

Cena akcji = S*d=18
Cena opcji = $f_d = 0$ (brak wykonania opcji)

Przykład

Można skorzystać ze wzoru wstawiając:

$u = 22/20 = 1.1, d = 18/20 = 0.9, r = 0.12, f_u = 1, f_d = 0, T = 1/4,$

$$\alpha = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

oraz

$$f = c = e^{-0.03}(0.6523 * 1 + 0.3477 * 0) = 0.633.$$