Wykład monograficzny

Matematyczne podejście do gry w szachy

Łukasz Balbus

12 października 2026

Streszczenie

Szachy są grą o ściśle określonych regułach. Pokażemy, że za pomocą narzędzi matematycznych można rozstrzygnąć, przynajmniej teoretycznie, problem istnienia strategii wygrywającej.

Przedstawimy dwa podejścia. Pierwsze, grafowe, opiera się na etykietowanym drzewie gry. Drugie, logiczne, polega na sformułowaniu problemu za pomocą funkcji zdaniowych. Omówimy również ograniczenia praktycznego zastosowania obu podejść.

Spis treści

1 Zasady gry w szachy **2**

2 Grafowy opis gry w szachy **3**

2.1 Rozwiązanie gry w szachy 5

2.2 Problem ze znalezieniem strategii optymalnej w szachach 7

3 Logiczne rozwiązanie problemu szachisty **10**

3.1 Logiczny opis gry 10

3.2 Logiczny dowód istnienia strategii optymalnych 11

1 Zasady gry w szachy

Uproszczona struktura zasady gry.

- Gracze będą drużynami zwanymi **Białe i Czarne.**
- Białe i Czarne mają po 8 figur różnej mocy, w tym jedną najważniejszą Króla i najmocniejszą Hetmana.
- Wygrywają:
  - Białe gdy opanują **czarnego Króla**;
  - Czarne gdy opanują **białego Króla**;
- Może dojść do sytuacji **patowej**, czyli remisu gdy zajdzie jedna z możliwości:
  - Jedna z drużyn straci możliwość wykonania ruchu mimo iż Król nie został opanowany;
  - Gracze wykorzystają limit powtórzenia swoich ruchów np. pięciokrotnie;
  - Gracze obu drużyn nie będą mieć sił potrzebnych do opanowania Króla, np. gdy zostanie sam Król po obu stronach, lub Król z figurą o ograniczonym polu rażenia;
  - Gracze uzgodnią że kończą grę, lub czynniki zewnętrzne ich do tego zmuszą;
- Białe wykonują pierwszy ruch.

Odrzucamy nierealistyczny przypadek gdy gracze grają wiecznie, więc wiemy że gra się skończy albo zwycięstwem jednego z graczy albo remisem.

Uwaga 1. *Zwykle, szczególnie w szachach turniejowych, gracze mają ograniczony czas na rozegranie partii. Gracz, który przekroczy przysługujący mu limit czasu, co do zasady przegrywa. Gra wymaga zatem nie tylko zdolności analitycznych, ale również sprawnego podejmowania decyzji pod presją czasu. Rekreacyjnie można jednak grać bez limitu czasu i takie założenie przyjmiemy na potrzeby naszego wykładu.*



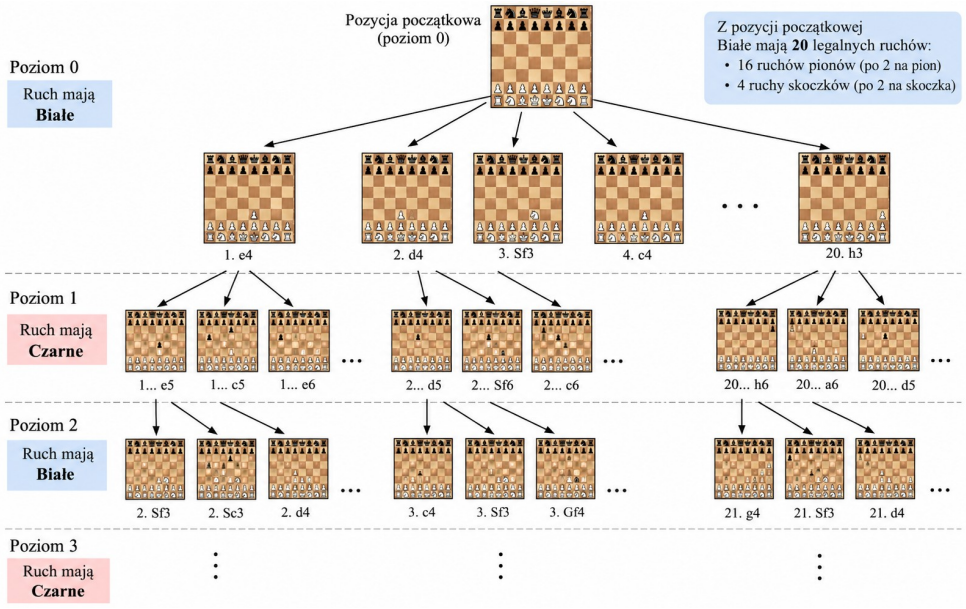
Rysunek 1: Zdjęcie ilustracyjne szachów.

2 Grafowy opis gry w szachy

Gra ma strukturę drzewa:

- Białe wykonują pierwszy ruch;
- Czarne odpowiadają;
- Białe wykonują drugi ruch;
- Czarne odpowiadają;
- Itp.

Odpowiemy na pytanie czy poszczególni gracze mają strategię wygrywającą, lub gwarantującą co najmniej remis.



Rysunek 2: Zdjęcie ilustracyjne stworzone przez AI.

Gra w szachy ma strukturę poziomowego drzewa o wyróżnionym wierzchołku znajdującym się na szczycie drzewa, wg ilustracji (patrz rysunek 2).

Drzewo konstruujemy w następujący sposób:

- Szczyt drzewa jest etykietowany wyjściowym układem szachów i znajduje się na poziomie 0;
- Załóżmy, że skonstruowaliśmy drzewo na poziomach $0, 1, \ldots, k$ dla $k \geq 0$ i nadaliśmy im etykiety oznaczające układ pól;
- Dla każdego wierzchołka na poziomie k i etykiecie e znajdujemy układy $l_1, l_2, \ldots, l_r$ które można otrzymać bezpośrednio z układu e, a następnie na poziomie $k+1$ konstruujemy wierzchołki o etykietach $l_1, l_2, \ldots, l_r$, który łączymy **gałęzią** z wierzchołkiem o etykiecie e;

Mając drzewo wielopoziomowe, gra przebiega w następujący sposób:

- Na wierzchołku drzewa są Białe, które wybierają gałąź prowadzącą do wierzchołka na poziomie 1, z którą gra będzie kontynuowana przez Czarne;

- Na wierzchołku wybranym przez Białe, Czarne kontynuują grę i one wybierają gałąź w dół, czyli do poziomu 3, z którego grę kontynuują Białe;
- Gra kończy się gdy gracz przejdzie do liścia (wierzchołka wiszącego), gdzie jest jeden z wyników: wygrywają Białe, wygrywają Czarne, lub jest pat.

Udowodnię, że na każdym etapie gry spełniony jest co najmniej jeden warunek:

1. Białe mają strategię wygrywającą (istnieje strategia Białych dająca wygraną niezależnie od strategii Czarnych);
2. Czarne mają strategię wygrywającą (istnieje strategia Czarnych dająca wygraną niezależnie od strategii Białych);
3. Obie drużyny mają strategię gwarantującą, że nie przegrają.

2.1 Rozwiązanie gry w szachy

Wykażemy, że jeśli obaj gracze znają całą strukturę gry, co najmniej jeden z nich może zagwarantować sobie zwycięstwo, lub obaj gracze mogą zagwarantować sobie strategię, która przyniesie im pat. Wtedy szachy przestaną być grą budzącą emocje, gdyż będzie istniało rozwiązanie przesądzające wynik. Udowodnimy pierwsze twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Przy założeniu, że gra w szachy ma skończoną liczbę możliwych ruchów, przy każdym układzie na szachownicy zachodzi jeden z warunków:*

(i) Białe mają strategie wygrywającą;

(ii) Czarne mają strategię wygrywającą;

(iii) Obie drużyny mają strategię gwarantujące co najmniej pat.

Dowód. Dowód przedstawimy indukcyjnie ze względu na maksymalną liczbę n możliwych kroków do końca.

Załóżmy, że $n = 1$, czyli pozostał tylko jeden ruch. Drużyna, która ma ruch (np. Białe) wyszukują dostępnego liścia, który daje im wygraną.

- Jeśli taki liść istnieje, wybór jest strategią wygrywającą Białych.
- Jeśli nie istnieje i wszystkie liście dają zwycięstwo Czarnym, wtedy Czarni mają pustą strategię wygrywającą.
- Jeśli natomiast niektóre liście dają zwycięstwo Czarnym, a niektóre pat, Białe wybiorą liście dającą pat. Zatem taki wybór jest strategią Białych gwarantującą, że nie przegrają, ale Czarne też mają taką strategię, która w ich przypadku jest pusta.

Analogicznie wygląda dowód gdy Czarne mają ruch.

Załóżmy, że dla pewnego n twierdzenie zachodzi. Czyli gdy pozostało maksymalnie n możliwych kroków to albo:

1. Czarne mają strategię wygrywającą;
2. Białe mają strategię wygrywającą;
3. Białe i Czarne mają strategie gwarantującą, że nie przegrają.

Rozpatrzmy grę, która ma maksymalnie $n+1$ możliwych kroków do końca. Wybór kroku oznacza, że wybór stanu, po którym jest maksymalnie n kroków do końca, a więc *podgry* n krokowej. Z założenia indukcyjnego, każda taka podgra ma strategię wygrywającą dla jednej z drużyn, lub obie drużyny mogą zagwarantować sobie remis. Jeśli Białe wykonują pierwszy ruch w grze $n+1$, to szukają podgry n krokowej, gdzie mają strategię wygrywającą.

1. Jeśli taka podgra istnieje, wybierają ją podgrę i kontynuują w niej strategię wygrywającą charakterystyczną dla podgry. Wówczas, Białe mają strategię wygrywającą w grze $n+1$ krokowej.
2. Jeśli taka strategia nie istnieje i wszystkie podgry posiadają strategię wygrywającą dla Czarnych, Białe wybiorą pewną podgrę, bo muszą, a Czarne dostosują strategię wygrywającą do wyboru Białych. Wtedy Czarne mają strategię wygrywającą dla $n+1$ krokowej gry.

3. Załóżmy, że Białe nie mają strategii wygrywającej w żadnej n krokowej podgrze, ale istnieje taka podgra, w której mogą zagwarantować sobie remis.

   (a) Białe wybiorą podgrę w której zagwarantować mogą sobie remis i będą kontynuować strategię zmierzającą do remisu. Jest to strategia gwarantująca co najmniej remis dla Białych w $n + 1$ krokowej grze;

   (b) Z założenia indukcyjnego, Czarne również mogą zapewnić sobie remis w każdej podgrze n krokowej, która gwarantuje remis dla Białych. Strategia Czarnych to zatem przeczekać ruch Białych które wybierają podgrę i kontynuować strategię dającą remis lub wygraną w wyznaczonej podgrze. Jest to strategia gwarantująca co najmniej remis w grze $n + 1$ krokowej;

Podobnie wygląda dowód gdy Czarne mają ruch.

Zatem twierdzenie zachodzi dla każdego układu na szachownicy. □

2.2 Problem ze znalezieniem strategii optymalnej w szachach

Gra w szachy wydaje się rozpracowana, ale jest pewien problem. Komputer nie zapamięta drzewa, co dopiero Garri Kasparov, o przeciętnym Janie Kowalskim nie wspominając.

- Przy starcie, Białe mają 20 możliwych ruchów;
- Czarne mają kolejne 20 możliwości, zatem wierzchołków wiszących jest 4000, od których są kolejne wyjścia;
- Daje to łącznie 4020 wszystkich wierzchołków dla dwóch ruchów;
- Z kolejnych wierzchołków liczba wyjść jest różna, gdyż kolejne figury są odblokowane co zwiększa liczbę kolejnych możliwości, ale kiedy dużo figur jest zbitych, możliwości jest znacznie mniej.

Przyjmując dla uproszczenia, że średnia wyjść jest 20, a każdy wierzchołek zajmuje 1 bajt. Celowo problem zostaje zaniżony, bo średnia liczba wyjść jest znacznie wyższa, a 1

bajt nie wystarcza do obliczenia pamięć dla wierzchołka. Pomijamy również pamięć dla gałęzi. Każde drzewo o głębokości n i o 20 wyjściach w dół ma w sumie

$$1 + 20 + 20^2 + \ldots + 20^n = \frac{1 - 20^{n+1}}{1 - 20} = \frac{1}{19}(20^{n+1} - 1)$$

wierzchołków i tyle bajtów potrzebuje.

Przyjmijmy, że laptop przysłowiowego Jana Kowalskiego (zdjęcie ilustracyjne 3) ma 16 GR Ram więc około $16 * 10^9$ bajtów, więc aby pomieścił całe drzewo musi być spełniona nierówność:

$$\frac{1}{19}(20^{n+1} - 1) \leq 16 * 10^9 \Leftrightarrow 20^{n+1} \leq 16 * 19 * 10^9 + 1 = 304.000.000.001$$

Wstawmy na próbę $n = 7$ i $n = 8$ mamy

$$20^{n+1} = 20^8 = 25.600.000.000 < 304.000.000.001,$$

oraz

$$20^{n+1} = 20^9 = 512.000.000.000 > 304.000.000.001.$$

Zatem komputer Jana Kowalskiego przechowa co najwyżej drzewo o głębokości 7, czyli umożliwiającą 7 ruchów dla obu drużyn. To niewiele. Przyjmijmy dla uproszczenia, że wojskowy superkomputer ma milon razy większą pamięć niż laptop, czyli $16 * 10^{15}$. Będzie mógł przechować drzewo o głębokości n, czyli taką wartość n, że:

$$20^{n+1} \leq 304 * 10^{15} + 1 = 304.000.000.000.000.001.$$

Wstawmy na próbę $n = 12$ i $n = 13$ mamy

$$20^{n+1} = 20^{13} = 81.920.000.000.000.001 < 304.000.000.000.000.001,$$

oraz

$$20^{n+1} = 20^{14} = 1.638.400.000.000.000.001 > 304.000.000.000.000.001,$$



Rysunek 3: Jan Kowalski - przeciętny użytkownik komputera. Postać fikcyjna stworzona przez AI.

zatem wojskowy superkomputer przechowa co najwyżej grę o 13 możliwych ruchach. **Zatem zastosowanie superkomputera może wydłużyć obserwowane drzewo gry o najwyżej 6 dodatkowych ruchów.**

Dwaj przeciętni gracze potrzebują około 60 ruchów do gry w szachy. Oznacza to, że nawet wojskowy superkomputer nie pomoże wygrać meczu. Struktura szachów jest prosta co do schematu, ale rozbudowana co do możliwości.

Uwaga 2 (o programach grających w szachy)**.** *Ponieważ komputer jest w stanie przeanalizować i przechować jedynie niewielki fragment całego drzewa gry, żaden współczesny program szachowy nie zna całej jego struktury. Program wybiera najbardziej obiecujące warianty, analizuje pewien fragment drzewa i ocenia pozycje, do których prowadzą rozważane ruchy. Taki mechanizm wystarcza, aby grać bardzo dobrze - bez konieczności rozwiązania całej gry i znalezienia strategii wygrywającej.*

Program nie dysponuje więc kompletną strategią optymalną wyznaczoną dla każdego możliwego przebiegu partii. Wykonuje strategię decyzyjną określoną przez zastosowany algorytm.

3 Logiczne rozwiązanie problemu szachisty

Gra w szachy ma strukturę naprzemienną. Ruchy nieparzyste wykonują białe, a parzyste czarne i z uwagi na ograniczenia fizyczne i biologiczne, ma ograniczoną liczbę ruchów $K > 0$. Nie znamy tej liczby ale do rozważań teoretycznych nie jest to istotne. Bez straty ogólności możemy założyć, że liczba K jest parzysta, bo jeśli najdłuższa gra naprawde skończy się przed $K-1$ i będzie to ruch białych, za kolejny ruch Czarnych uznamy strategię pustą, a więc "nic nie rób" i będzie to jedyny wykonalny ruch. W ten "sztuczny" sposób przedłużymy grę do K parzystego.

3.1 Logiczny opis gry

Skonstruujemy strukturę logiczną gry w szachy.

- Oznaczmy B_1 zbiór możliwych ruchów Białych w pierwszym kroku oraz $C_2(b_1)$ zbiór możliwych ruchów Czarnych w drugim kroku gdy Białe wybrały wcześniej $b_1 \in B_1$;
- Dla dowolnego $k \leq K-1$ definiujemy $B_k(b_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$ zbiór ruchów Białych w kroku k i $C_{k+1}(b_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, b_k)$ zbiór ruchów Czarnych w kroku k, gdy wcześniejsze strategie Białych i Czarnych $b_1, c_2, \ldots, b_k$ są już zdefiniowane;
- Ciągu ruchów $b_1, c_2, \ldots, b_{K-1}, c_K$ spełniających ww warunki jest wykonalny.

Poniżej formalna definicja ciągu wykonalnego.

Definicja 1. *Mówimy że ciąg $(b_1, c_2, b_3, \ldots, b_{K-1}, c_K)$ jest **wykonalny** (ang.feasible) jeśli $b_1 \in B_1$ i dla każdego $k = 2, 3, \ldots, K-1$, $b_k \in B_k(b_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$ oraz $c_{k+1} \in C_{k+1}(b_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, b_k)$*

Dla ciągów wykonalnych $(b_1, c_2, b_3, \ldots, b_{K-1}, c_K)$ zdefiniujmy następujące funkcję zdaniowe:

- $W(b_1, c_2, b_3, \ldots, c_K)$ oznaczającą zwycięstwo Białych;
- $C(b_1, c_2, b_3, \ldots, c_K)$ oznaczającą zwycięstwo Czarnych;

- $\Pi(b_1, c_2, b_3, \ldots, b_{K-1}, c_K)$ oznaczającą pat.

Zauważmy, że:

- Białe mają strategię wygrywającą jeśli:

$$\exists_{b_1 \in B_1} \forall_{c_2 \in C_2} \exists_{b_3 \in B_3} \ldots \exists_{b_{K-1} \in B_{K-1}} \forall_{c_K \in C_K} W(a_1, b_2, a_3, b_4, \ldots, a_{K-1}, b_K) \qquad (1)$$

  Tu dla skrócenia zapisu $b_k \in B_k$ oznacza $b_k \in B_k(b_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$ dla $k > 1$, podobny skrót jest dla $c_k \in C_k$;

- Czarne mają strategię wygrywającą jeśli:

$$\forall_{b_1 \in B_1} \exists_{a_2 \in C_2} \forall_{b_3 \in B_3} \ldots \forall_{b_{K-1} \in B_{K-1}} \exists_{c_K \in C_K} C(a_1, b_2, a_3, b_4, \ldots, a_{K-1}, b_K) \qquad (2)$$

3.2 Logiczny dowód istnienia strategii optymalnych

Przedstawimy drugi sposób dowodzenia Twierdzenia 1 używając logicznych kwantyfikatorów. Przypomnę sformułowanie.

Twierdzenie. *Przy założeniu, że gra w szachy ma skończoną liczbę możliwych ruchów, przy każdym układzie na szachownicy zachodzi jeden z warunków:*

(i) Białe mają strategie wygrywającą;

(ii) Czarne mają strategię wygrywającą;

(iii) Obie drużyny mają strategię gwarantujące co najmniej pat.

Dowód. Załóżmy, że Białe ani Czarne nie mają strategii wygrywającej. Zatem zaprzeczymy zdaniom (1) i (2).

- Białe nie mają strategii wygrywającej jest równoważne zaprzeczeniu funkcji zdaniowej (1):

$$\neg[\exists_{b_1\in B_1}\forall_{b_2\in C_2}\exists_{b_3\in B_3}\ldots\exists_{b_{K-1}\in B_{K-1}}\forall_{c_K\in C_K}W(a_1,b_2,a_3,b_4,\ldots,a_{K-1},b_K)]$$

$$\equiv \forall_{b_1\in B_1}\exists_{c_2\in C_2}\forall_{b_3\in C_3}\ldots\forall_{b_{K-1}\in B_{K-1}}\forall_{c_K\in C_K}\neg W(a_1,b_2,a_3,b_4,\ldots,a_{K-1},b_K).$$

Oznacza to, że Czarne mogą sobie zagwarantować, że nie przegrają.

- Czarne nie mają strategii wygrywającej jest równoważne zaprzeczeniu funkcji zdaniowej (2):

$$\neg[\forall_{b_1\in B_1}\exists_{c_2\in C_2}\forall_{b_3\in C_3}\ldots\forall_{b_{K-1}\in B_{K-1}}\exists_{c_K\in C_K}C(a_1,b_2,a_3,b_4,\ldots,a_{K-1},b_K)]$$

$$\equiv \exists_{b_1\in B_1}\forall_{c_2\in C_2}\exists_{b_3\in B_3}\ldots\exists_{b_{K-1}\in B_{K-1}}\forall_{c_K\in C_K}\neg C(a_1,b_2,a_3,b_4,\ldots,a_{K-1},b_K).$$

Oznacza to, że Białe mogą sobie zagwarantować, że nie przegrają.

Ostatecznie, brak strategii wygrywającej dla Białych i Czarnych oznacza, że obie drużyny mają strategię gwarantującą, że nie przegrają. □

Literatura

[1] Mashler, M., Solan, E, Zamir, S. (2013). *Game Theory.* Cambridge University Press.