Wykład monograficzny

Loterie i teoria użyteczności

Łukasz Balbus

12 października 2026

Streszczenie

Teoria gier bada sytuacje, w których wynik decyzji jednego uczestnika zależy również od decyzji innych uczestników. Ich interesy mogą być sprzeczne lub częściowo zbieżne, a poszczególni uczestnicy mogą odmiennie oceniać możliwe wyniki. Oceny te opisujemy za pomocą *preferencji*.

Preferencje można niekiedy reprezentować za pomocą *funkcji użyteczności*, która przypisuje wynikom wartości liczbowe w taki sposób, aby wyniki bardziej preferowane miały większą użyteczność niż wyniki mniej preferowane. Przedstawimy warunki, przy których taka reprezentacja istnieje.

Wynik gry nie zawsze jest pewny. Może zależeć od zdarzeń losowych, a także od losowych wyborów dokonywanych przez uczestników. Prowadzi to do pojęcia *loterii*, czyli rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze możliwych wyników. Sformułujemy aksjomaty von Neumanna–Morgensterna i udowodnimy twierdzenie o istnieniu funkcji użyteczności reprezentującej preferencje na loteriach i liniowej względem ich mieszanin. Omówimy również ograniczenia tych aksjomatów i sytuacje, w których mogą one nie odpowiadać rzeczywistym preferencjom uczestników.

Spis treści

1 Formalizacja preferencji **3**

2 Preferencje na loteriach **8**

3 Aksjomaty von-Neumana-Morgensterna **14**

4 Istnienie użyteczności na loteriach **18**

5 Dyskusja o aksjomatach **24**

1 Formalizacja preferencji

Ogólnie za zbiór wyników (alternatyw) przyjmiemy abstrakcyjny zbiór O. Każdy gracz będzie miał określone *preferencje* na O.

Definicja 1. *Każdą relację* $\preceq \subset O \times O$ *nazywamy relacją* ***preferencji****. Zamiast pisać* $(o_1, o_2) \in \preceq$ *piszemy* $o_1 \preceq o_2$*.*

Z relacji preferencji wprowadzimy relację obojetności.

Definicja 2. *Dla relacji preferencji* $\preceq$ *na* O *definiujemy relację* ***obojętności****:*

$$o_1 \approx o_2 \Leftrightarrow (o_1 \preceq o_2) \wedge (o_2 \preceq o_1)$$

Relację preferencji można zaprzeczyć.

Definicja 3. *Przez* $\not\preceq$ *rozumiemy* ***zaprzeczenie relacji preferencji*** $\preceq$*:*

$$o_1 \not\preceq o_2 \Leftrightarrow \neg(o_1 \preceq o_2).$$

Z relacji preferencji i zaprzeczenia mamy relację ścisłej preferencji:

Definicja 4. *Dla relacji preferencji* $\preceq$ *i na* O *definiujemy relację* ***ścisłych preferencji****:*

$$o_1 \prec o_2 \Leftrightarrow (o_1 \preceq o_2) \wedge (o_2 \not\preceq o_1).$$

Niekiedy preferencja między alternatywami nie jest określona. Ogólnie nie jest tym samym co obojętność.

Przykład 1. *Klient baru ma do wyboru następujące drinki alkoholowe: brazylijski* ***caju*** *(w Brazylii wymawia się jak Kaziu, p. rysunek 1), oraz polskie:* ***jabłecznik*** *i* ***martini****. Stąd* $O = \{caju, jabłecznik, martini\}$*. Klient baru zna smak polskich drinków:* ***jabłecznika*** *i* ***martini*** *i preferuje je jednakowo, czyli*

$$jabłecznik \approx martini,$$



Rysunek 1: Zdjęcie ilustracyjne brazylijskiego drinku *caju*.

ale nie zna smaku brazylijskiego ***caju****, więc nie porówna ich z polskimi drinkami:*

$$caju \not\preceq jabłecznik, \quad \textit{i jednocześnie} \quad jabłecznik \not\preceq caju,$$

a także

$$caju \not\preceq martini, \quad \textit{i jednocześnie} \quad martini \not\preceq caju.$$

Tu caju jest ***nieporównywalny*** *z jabłecznikiem i martini, a jabłecznik i martini są porównywalne i są* ***tak samo preferowane****.*

Teria użyteczności ma za zadanie nasać wartość liczbową elementom O, tak aby odzwierciedlały preferencje.

Definicja 5. *Funkcję* $u : O \mapsto \mathbb{R}$ *nazywamy* ***użytecznością reprezentującą preferencje*** $\preceq$ *jeśli:*

$$o_1 \preceq o_2 \Leftrightarrow u(o_1) \leq u(o_2).$$

Łatwo pokażać następujący fakt

Fakt 1. *Jeśli* u *jest użytecznością na* O *reprezentującą* $\preceq$ *wtedy*

$$o_1 \approx o_2 \Leftrightarrow u(o_1) = u(o_2)$$

oraz

$$o_1 \prec o_2 \Leftrightarrow u(o_1) < u(o_2).$$

Dowód. Pokażemy to drugie. Niech $o_1 \prec o_2$. Wtedy $o_2 \not\preceq o_1$ i nie może wtedy zajść $u(o_2) \leq u(o_1)$, stąd $u(o_1) < u(o_2)$. Odwrotnie, załóżmy $u(o_1) < u(o_2)$. Wtedy $o_1 \preceq o_2$. Ponieważ nie jest prawdą, że $u(o_2) \leq u(o_1)$, relacja $o_2 \preceq o_1$ jest nieprawdziwa. Stąd $o_1 \prec o_2$. □

Poniższa uwaga jest warta odnotowania.

Uwaga 1. *Nawet gdy O jest zbiorem skończonym, nie każda preferencja jest reprezentowana przez funkcję użyteczności. Przykład 1 jest właśnie takim przykładem. Załóżmy bowiem, że taka funkcja istnieje. Wtedy*

$$u(caju) \geq u(jabłecznik) \quad lub \quad u(caju) \leq u(jabłecznik),$$

więc z definicji użyteczności wynikałoby, że

$$caju \succeq jabłecznik \quad lub \quad caju \preceq jabłecznik,$$

co przeczy definicji $\preceq$ w Przykładzie 1.

Kolejne założenia na preferencje są konieczne, aby funkcja użyteczności mogła istnieć.

Założenie 1. *Preferencja $\preceq$ jest **spójna**, to znaczy*

$$\forall_{(o_1,o_2)\in O\times O}(o_1 \preceq o_2) \vee (o_2 \preceq o_1).$$

Założenie 2. *Preferencja $\preceq$ jest **zwrotna**, to znaczy*

$$\forall_{o\in O} o \preceq o.$$

Założenie 3. *Preferencja $\preceq$ jest **przechodna**, to znaczy*

$$\forall_{o_1,o_2,o_3\in O}(o_1 \preceq o_2) \wedge (o_2 \preceq o_3) \Rightarrow (o_1 \preceq o_3).$$

Aksjomat przechodniości oznacza, że jeżeli decydent woli wynik o_2 od o_1, a o_3 od o_2, to powinien również woleć o_3 od o_1.

W codziennym życiu preferencje nie zawsze spełniają ten warunek. Ludzie mogą kierować się różnymi kryteriami w zależności od porównywanych możliwości. Każdy pojedynczy wybór może wydawać się rozsądny, a mimo to wszystkie wybory razem mogą tworzyć cykl.

Przyjrzyjmy się klientowi kawiarni, który próbuje wybrać jeden z trzech napojów: Espresso, Iced Americano i Latte.

Przykład 2. *Klient kawiarni wybiera napój, porównując dostępne możliwości parami. Mając do wyboru Espresso i Iced Americano, wybiera Espresso ze względu na intensywność smaku. Między Iced Americano a Latte wybiera Iced Americano, ponieważ nie przepada za mlecznymi kawami. Jednak porównując Latte z Espresso, wybiera Latte, gdyż woli napój, którym może delektować się dłużej.*

Otrzymujemy

$$\textit{Espresso} \succ \textit{Iced Americano}, \quad \textit{Iced Americano} \succ \textit{Latte}, \quad \textit{Latte} \succ \textit{Espresso}.$$

Preferencje nie są przechodnie. W zależności od porównywanej pary klient kieruje się innym kryterium: intensywnością smaku, zawartością mleka albo wielkością napoju.

Sformułujmy następujący lemat.

Fakt 2. *Jeśli relacja preferencji $\preceq$ na O spełnia Założenia 1, 2 i 3, to jej relacja obojętności na O jest relacją równoważności. Co więcej, jeśli O jest zbiorem skończonym istnieje rodzina klas abstrakcji $(C_1, C_2, \ldots, C_N)$ taka, że*

$$o_1 \preceq o_2 \Leftrightarrow (o_1 \in C_i) \wedge (o_2 \in C_j) \wedge (i \leq j).$$

Dowód. Pokażemy, że $\approx$ jest relacją równoważności.

1. **Zwrotna.** Łatwo widać, że $o \preceq o$ stąd $o \approx o$;

2. **Symetryczna.** Niech $o_1 \approx o_2$. Wtedy $o_2 \preceq o_1$ i $o_1 \preceq o_2$. Stąd $o_2 \approx o_1$;

3. **Przechodnia.** Niech $o_1 \approx o_2$ i $o_2 \approx o_3$. Stąd wynika, że $o_1 \preceq o_2 \preceq o_3$, stąd $o_1 \preceq o_3$. Podobnie pokazujemy, że $o_3 \preceq o_1$, stąd mamy $o_1 \approx o_3$;

Stąd $\approx$ jest relacja równoważności, stąd istnieją klasy abstrakcji O, czyli $\{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ takie, że $C_i \cap C_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $\bigcup_{j=1}^{N} C_j = O$, oraz dla wszystkich j, fakt $o_1, o_2 \in C_j$ jest równoważny $o_1 \approx o_2$. Wybierzmy $\tilde{o}_j \in C_j$ dla wszystkich j. Zmieniając numeracje jeśli będzie to konieczne, załóżmy dodatkowo

$$\tilde{o}_1 \prec \tilde{o}_2 \prec \ldots \prec \tilde{o}_N.$$

Udowodnimy drugą część twierdzenia. Niech $o_1 \preceq o_2$ i załóżmy, że $o_1 \in C_i$ i $o_2 \in C_j$. Wtedy

$$\tilde{o}_i \approx o_1 \preceq o_2 \approx \tilde{o}_j.$$

Mamy więc $\tilde{o}_i \preceq \tilde{o}_j$, stąd i z definicji $(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \ldots, \tilde{o}_N)$, mamy $i \leq j$. Odwrotnie, dla $i \leq j$ wybierzmy $o_1 \in C_i$ i $o_2 \in C_j$. Wtedy

$$o_1 \approx \tilde{o}_i \preceq \tilde{o}_j \approx o_2,$$

stąd $o_1 \preceq o_2$. □

Założenia 1, 2 i 3 na preferencje wystarczą, żeby nadać użyteczność reprezentującą preferencje o ile zbiór wyników jest zbiorem skończonym.

Twierdzenie 1. *Niech O będzie zbiorem skończonym i niech $\preceq$ będzie relacją preferencji na O spełniająca założenia 1, 2 i 3. Wtedy istnieje użyteczność na O reprezentująca $\preceq$.*

Dowód. Relacja obojętności $\approx$ jest relacją równoważności. Z Faktu 2, $C_1, \ldots, C_N$ będą klasami abstrakcji, takimi że dla wszystkich $i < j$, $o_1 \in C_i$ i $o_2 \in C_j$ wtedy i tylko wtedy gdy $o_1 \prec o_2$. Wtedy wystarczy zdefiniować $u(o) = j$ jeśli $o \in C_j$. Z definicji klas, u reprezentuje $\preceq$. □

Jedną preferencję może reprezentować wiele użyteczności.

Twierdzenie 2. *Niech O będzie dowolnym zbiorem i niech $\preceq$ będzie relacją preferencji na O spełniająca założenia 1, 2 i 3. Niech u będzie użytecznością na O reprezentującą $\preceq$ a $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ściśle rosnącą funkcją. Wtedy złożenie $v \circ u$, czyli $v \circ u(o) := v(u(o))$ również jest użytecznością reprezentującą $\preceq$.*

Dowód. Jesli $o_1 \preceq o_2$ to $u(o_1) \leq u(o_2)$, bu u reprezentuje $\preceq$. Wtedy

$$v \circ u(o_1) = v(u(o_1)) \leq v(u(o_2)) = v \circ u(o_2),$$

ponieważ $v(\cdot)$ jest funkcją rosnącą.

Odwrotnie, załóżmy że

$$v \circ u(o_1) \leq v \circ u(o_2),$$

czyli

$$v(u(o_1)) \leq v(u(o_2)).$$

Znowu korzystamy z faktu, że $v(\cdot)$ jest ściśle rosnąca i wnioskujemy, że $u(o_1) \leq u(o_2)$, a ponieważ u reprezentuje $\preceq$, stąd $o_1 \preceq o_2$.

Ostatecznie wnioskujemy, że $v \circ u$ reprezentuje $\preceq$. □

2 Preferencje na loteriach

W niniejszym rozdziale skupimy się na preferencjach dotyczących loterii. Jak porównywać loterie? Czy można przypisać im wartości liczbowe zgodne z preferencjami decydenta? Czy każdej loterii odpowiada pewny wynik, który decydent uważa za równie pożądany?

Zanim rozwiniemy teorię przyjmiemy formalną definicję loterii. Dla każdej liczby naturalnej m, niech

$$\Delta_m := \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} p_k = 1, \forall_{k=1,2\ldots,m} p_k \geq 0, \right\}.$$

Ponadto zdefiniujmy

$$\Delta_m^\circ := \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} p_k = 1, \forall_{k=1,2\ldots,m} p_k > 0 \right\}$$

Niech X będzie skończonym zbiorem możliwych wyników, a oznaczymy go jako $X := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Zbiór rozkładów prawdopodobieństwa na wynikach oznaczymy jako Δ_n, gdzie

Definicja 6. ***Loterią prostą**, lub po prostu **loterią** nazywamy funkcję $L : X \mapsto [0, 1]$ taką, że $(L(a_1), L(a_2), \ldots, L(a_n)) \in \Delta_n$. Jeśli $p_i = L(a_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to loterię będziemy oznaczać jako $L = (a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n)$.*

Definicja 7. *Loteria prosta $(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n)$ jest **częściowo zdegenerowana** gdy istnieje niepusty podzbiór właściwy indeksów $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ taki, że $p_k \neq 0$ dla wszystkich $k \in I$ i $p_k = 0$ dla $k \notin I$.*

Definicja 8. *Mówimy, że loteria jest $(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n)$ jest **zdegenerowana** gdy istnieje indeks k taki, że $p_k = 1$ i $p_j = 0$ dla $j \neq k$.*

Oznaczenie. *Załóżmy, że loteria $(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n)$ jest częściowo zdegenerowana, oraz spełniony jest warunek: $p_k \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $k \in I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Wtedy w opisie loterii można opuścić wyniki, które są niemożliwe, czyli dopuszczamy zapis:*

$$(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n) := (a_{i_1}, p_{i_1}; a_{i_2}, p_{i_2}; \ldots; a_{i_m}, p_{i_m}).$$

W szczególności dla zdegenerowanej loterii gdy $p_k = 1$ dopuszczamy zapis

$$(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n) := (a_k, 1).$$

Loterię zdegenerowaną utożsamiamy z wynikiem:

$$(a_k, 1) \equiv a_k.$$

Jeśli $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ *jest permutacją identyfikujemy dwa zapisy*

$$(a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n) = (a_{\tau_1}, p_{\tau_1}; a_{\tau_2}, p_{\tau_2}; \ldots; a_{\tau_n}, p_{\tau_n}).$$

Matematycznie zbiór loterii prostych oznaczamy jako

$$\mathcal{L} := \{L : X \mapsto [0, 1] : (L(a_1), L(a_2), \ldots, L(a_n)) \in \Delta_n\}.$$

Loterię można identyfikować z Δ_n, lub z rozkładem prawdopodobieństwa na $\{1, 2, \ldots, n\}$. Loterię można zagnieżdżać w następujący sposób.

Definicja 9. ***Loterią złożoną*** *(ang. compound lottery) na nazywamy loterię postaci*

$$(L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N)$$

dla $L_1, L_2, \ldots, L_N \in \mathcal{L}$ *i* $(q_1, q_2, \ldots, q_N) \in \Delta_N$.

Oznaczenie. *Loterię złożoną postaci* $(L, 1)$ *nazywamy* ***zdegenerowaną*** *i również utożsamiamy z* L. *Również dla permutacji* $\tau : \{1, 2, \ldots, N\} \mapsto \{1, 2, \ldots, N\}$ *uznajemy równość*

$$(L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N) = (L_{\tau_1}, q_{\tau_1}; L_{\tau_2}, q_{\tau_2}; \ldots; L_{\tau_N}, q_{\tau_N})$$

Matematycznie zbiór loterii złożonej zapiszemy jako

$$\mathscr{L} := \left\{\hat{L} : \{L_1, L_2, \ldots, L_N\} \mapsto [0, 1] : \{L_1, L_2, \ldots, L_N\} \subset \mathcal{L}, (\hat{L}(L_1), \hat{L}(L_2), \ldots, \hat{L}(L_N)) \in \Delta_N^\circ\right\}.$$

Innymi słowy, loterię złożoną identyfikujemy z rozkładem na $\mathcal{L}$ o skończonym nośniku. Loterię prostą $L \in \mathcal{L}$ identyfikujemy ze zdegenerowaną loterią złożoną postaci $(L, 1)$, stąd $\mathcal{L} \subset \mathscr{L}$.

Oznaczenie. *W przypadku loterii złożonej postaci* $(L_1, q_1; \ldots, L_N, q_N)$, *(dla których* $L_i \neq L_j$*) można powielić m-krotnie zapis w następujący sposób: jeśli* $L_i = L$ *to*

$$(L_1, p_1; \ldots; L, q_i; \ldots; L_N, q_N) = (L_1, p_1; \ldots; L_{j-1}, q_{j-1}; L, \tilde{q}_1; \ldots; L, \tilde{q}_m; L_{j+1}, q_{j+1}; \ldots; L_N, q_N),$$

gdzie $\sum_{i=1}^{m} \tilde{q}_i = q_j$, *oraz* $\tilde{q}_i > 0, \forall_{i=1,2,\ldots,m}$.

Oznaczmy zbiór preferencji na $\mathscr{L}$ spełniających Założenia 1, 2 i 3 jako Π. Formalnie:

$$\Pi := \{\preceq \subset \mathscr{L} \times \mathscr{L} : \preceq \text{ jest spójna, zwrotna i przechodnia}\}.$$

Poniższy przykład pokazuje co to jest loteria złożona.

Przykład 3 (Audyt w urzędzie)**.** *W urzędzie ma zostać przeprowadzona kontrola Działu Zamówień Publicznych. Nie wiadomo jednak, który audytor zostanie do niej przydzielony. Audytora wybiera się losowo:*

- *z prawdopodobieństwem* 0.2 *kontrolę przeprowadzi* mecenas Zimne Espresso*. Jest skuteczny i bezkompromisowy. W krótkim czasie znajduje praktycznie każde uchybienie. Nie wdaje się w dyskusje: uchybienie oznacza raport - krótki, zwięzły i trafny;*

- *z prawdopodobieństwem* 0.5 *kontrolę przeprowadzi* Iced Americano*. Jest równie skrupulatny i surowy, ale pozwala urzędnikom przedstawić wyjaśnienia, co niekiedy ma wpływ na wynik audytu. Dokładnie wskazuje uchybienia, wyjaśnia ich znaczenie i daje zalecenia, jak ich uniknąć w przyszłości;*

- *z prawdopodobieństwem* 0.3 *kontrolę przeprowadzi* Latte*. Jest najbardziej wyrozumiały. Poważne naruszenia zawsze umieszcza w raporcie, ale w przypadku drobniejszych uchybień często poprzestaje na ustnym pouczeniu.*

W dokumentacji działu znajduje się jedno uchybienie. Jeżeli kontrolę prowadzi Mecenas Zimne Espresso, zostanie ono wpisane do raportu z prawdopodobieństwem 1*. Iced Americano wpisze je do raportu z prawdopodobieństwem* 0.8*, natomiast Latte z prawdopodobieństwem* 0.2*. Rozpisz loterię formalnie i wyjaśnij interpretację.*

Rozwiązanie. *Wyniki oznaczymy* -1 *jako wpisanie uchybienia do raportu,* 0 *pouczenie lub przeoczenie uchybienia. Rozpatrujemy 3 loterie na zbiorze* $X = \{-1, 0\}$*:*



Rysunek 2: Losowe wyznaczenie audytora. Postacie fikcyjne stworzone przez AI.

$$\begin{aligned} ZE &= (-1,1)(\textit{audyt mec. Zimne Espresso}); \\ IA &= (-1,0.8;0,0.2)(\textit{audyt mec. Iced Americano}); \\ LT &= (-1,0.2;0,0.8)(\textit{audyt mec. Latte}); \end{aligned}$$

Audyty mec. Zimne Espresso, mec. Iced Americano i mec. Latte są loteriami prostymi, czyli są elementami $\mathcal{L}$*. Loteria złożona reprezentująca algorytm wyboru ma postać* $\hat{L} = (ZE, 0.2; IA, 0.5; LT, 0.3)$*. Losowanie odbywa się zatem dwustopniowo:*

1. *Losowanie audytora ze zbioru* $\{ZE, IA, LT\}$*;*
2. *Wyznaczony audytor "losuje" wynik ze zbioru* $\{-1, 0\}$*:*
   (a) *ZE wybiera* -1 *z prawdopodobieństwem* 1*:* $P(ZE = -1) = 1$*;*
   (b) *IA wybiera* -1 *z prawdopodobieństwem* 0.8*, natomiast* 0 *z prawdopodobieństwem* 0.2*, czyli* $P(IA = -1) = 0.8 = 1 - P(IA = 0)$*;*

(c) LT wybiera -1 *z prawdopodobieństwem* 0.2*, natomiast* 0 *z prawdopodobieństwem* 0.8*, czyli* $P(LT = -1) = 0.2 = 1 - P(LT = 0)$.

Definicja 10 (Redukcja loterii złożonej)**.** *Niech* $L_1, L_2, \ldots, L_N \in \mathcal{L}$ *będą loteriami prostymi postaci*

$$L_j := (a_1, q_1^j; a_2, q_2^j; \ldots, a_N, q_N^j) \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

i niech $\hat{L}$ *będzie loterią złożoną postaci*

$$\hat{L} := (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N).$$

Redukcją loterii złożonej *(ang. simplification of compound lottery), to loteria prosta postaci*

$$m(\hat{L}) := (a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n),$$

gdzie

$$r_k = \sum_{j=1}^{N} q_j p_k^j.$$

Różnica między loterią złożoną a jej redukcji prowadzi do tego samego rozkładu na wynikach z X.

Uwaga 2. *Niech* L *i* $\hat{L}$ *będą loteriami postulowanymi w Definicji 10. Różnica między* $\hat{L}$ *i* $m(\hat{L})$ *polega na interpretacji operacji losowania:*

1. *Loteria złożona* $\hat{L}$ *prowadzi do dwustopniowego losowania: najpierw wybieramy losowo loterię prostą, a potem z wybranej loterii wybieramy losowo wynik.*

2. *Redukcja loterii złożonej prowadzi do natychmiastowego losowego wyboru wyniku zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.*

Pokażemy, że $\hat{L}$ *i* $m(\hat{L})$ *prowadzą do tego samego rozkładu na wynikach. Jeśli* Y *to zmienna losowa wybierająca wynik przy dwustopniowym losowaniu* $\hat{L} := (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N)$*, wtedy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite*

$$P(Y = a_k) = \sum_{j=1}^{N} P(Y = a_k | Loteria\ j) P(Loteria\ j) = \sum_{j=1}^{N} p_k^j q_j = r_k$$

czyli rozkład Y jest tożsamy z loterią $m(\hat{L})$.

Poniższy przykład pokazuje jak działa redukcja loterii.

Przykład 4 (Audyt w urzędzie C.D.)**.** *Znajdź redukcję loterii z Przykładu 3.*

Rozwiązanie. *Generalnie kierownika urzędu, który jest audytowany interesuje* ***wynik audytu, a nie to, który audytor wpisał uchybienie do raportu****. Możemy zatem* ***uprościć*** *loterię złożoną do loterii prostej, obliczając prawdopodobieństwa poszczególnych wyników audytu. Niech A oznacza zmienną losową oznaczającą wynik audytu. Przypomnijmy, że loteria ma postać*

$$\hat{L} = (ZE, 0.2; IA, 0.5; LT, 0.3), \quad gdzie \quad \begin{cases} ZE &= (-1, 1) \\ IA &= (-1, 0.8; 0, 0.2) \\ LT &= (-1, 0.2; 0, 0.8). \end{cases}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} P(A=-1) &= P(A=-1|ZE)P(ZE) + P(A=-1|IA)P(IA) + P(A=-1|LT)P(LT) \\ &= 0.2 + 0.8 * 0.5 + 0.2 * 0.3 = 0.2 + 0.4 + 0.06 = 0.66. \end{aligned}$$

Zatem $P(A=0) = 0.34$. Czyli równoważna prosta loteria to $m(\hat{L}) := (-1, 0.66; 0, 0.34)$.

3 Aksjomaty von-Neumana-Morgensterna

Za prekursorów teorii gier uznawani są John von-Neumann (1903-1957) - amerykańsko-węgierski matematyk, fizyk, informatyk i inżynier chemik, oraz Oskar Morgenstern (1902-1977), niemiecki ekonomista, którzy rozważali teorię oczekiwanej użyteczności.

Na preferencjach na loteriach ze zbioru O sformułujemy i omówimy aksjomaty von-Neumanna - Morgensterna. Zaczniemy od Aksjomatu Ciągłości i Aksjomatu Monotoniczności.

Aksjomat 1 (Ciągłość)**.** *Dla dowolnych wyników $x_1, x_2, x_3 \in X$, takich, że $x_1 \succeq x_2 \succeq x_3$, oraz $x_1 \succ x_3$, istnieje liczba $\alpha \in [0,1]$ taka, że*

$$x_2 \approx (x_1, \alpha; x_3, 1-\alpha).$$

Aksjomat 2 (Monotoniczność)**.** *Niech $\alpha, \beta \in [0,1]$. Dla dowolnych wyników $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 \succ x_2$*

$$(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \preceq (x_1, \beta; x_2, 1-\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \beta.$$

Aksjomat Monotoniczności można sformułować alternatywnie.

Lemat 1. *Jeśli preferencje $\preceq \in \Pi$ spełniają Aksjomat Monotoniczności, to dla dowolnych stałych $\alpha, \beta \in [0,1]$ i dla dowolnych wyników $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 \succ x_2$ zachodzi równoważność*

$$(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \prec (x_1, \beta; x_2, 1-\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta.$$

Dowód. W pierwszym kroku zakładamy $(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \prec (x_1, \beta; x_2, 1-\beta)$ Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\alpha \geq \beta$. Z Aksjomatu Monotoniczności wnioskujemy wtedy, że $(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \succeq (x_1, \beta; x_2, 1-\beta)$, co przeczy założeniu. Sprzeczność dowodzi, że $\alpha < \beta$.

Dowodząc w drugą stronę zakładamy, że $\alpha < \beta$. Dla dowodu nie wprost, załóżmy, że $(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \succeq (x_1, \beta; x_2, 1-\beta)$. Aksjomatu Monotoniczności wnioskujemy wtedy, że $\alpha \geq \beta$ co przeczy założeniu. Zatem $(x_1, \alpha; x_2, 1-\alpha) \prec (x_1, \beta; x_2, 1-\beta)$. □

Poniższe twierdzenie pokazuje, że gdy dodatkowo założymy aksjomat Ciągłości, teza i założenie Lematu 1 są równoważne.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że preferencje $\preceq \in \Pi$ spełniają Aksjomat Monotoniczności i Ciągłości. Wtedy dla dowolnej trójki $x_1, x_2, x_3 \in X$ takiej, że $x_1 \succeq x_2 \succeq x_3$ takich, że $x_1 \succ x_3$, stała α definiująca Aksjomat Ciągłości jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Załóżmy, że

$$x_1 \succeq x_2 \succeq x_3, \quad \text{oraz} \quad x_1 \succ x_3.$$

Z Aksjomatu Ciągłości istnieje $\alpha \in [0,1]$ taka że

$$x_2 \approx (x_1, \alpha; x_3, 1-\alpha). \tag{1}$$

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieje również inna stała $\beta \in [0,1]$ taka, że $\beta \neq \alpha$

$$x_2 \approx (x_1, \beta; x_3, 1-\beta). \tag{2}$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $\alpha < \beta$. Wtedy jednak Lemat 1 daje

$$(x_1, \alpha; x_3, 1-\alpha) \prec (x_1, \beta; x_3, 1-\beta),$$

co przeczy (1) i (2). □

Aksjomat 3 (O redukcji loterii złożonej)**.** *Niech $L_1, L_2, \ldots, L_N \in \mathcal{L}$ będą loteriami prostymi i niech $\hat{L}$ będzie loterią złożoną postaci*

$$\hat{L} := (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N).$$

Jeśli $m(\hat{L})$ jest redukcją loterii $\hat{L}$, to

$$\hat{L} \approx m(\hat{L}).$$

Kolejny przykład pokazuje jak działają Aksjomaty o Ciągłości i o Redukcji.

Przykład 5 (Audyt w urzędzie C.D.)**.** *Powróćmy do Przykładu 3. Zauważmy, że dla $X = \{-1, 0\}$, loterii prostych $ZE, IA, LT \in \mathcal{L}$ i loterii $\hat{L} := (ZE, q_1; IA, q_2, LT, q_3)$ prawdopodobieństwo znalezienia i raportowania nieprawidłowości wynosi*

$$p_{\hat{L}} = P(A = -1) = q_1 + 0.8q_2 + 0.2q_3.$$

Przyjmijmy, że preferencje dla kontrolowanego $\preceq$ są zdefiniowane następująco:

$$\hat{L}_1 \preceq \hat{L}_2 \quad \textit{wtedy i tylko wtedy gdy } p_{\hat{L}_1} \geq p_{\hat{L}_2}.$$

Kontrolowany chce ukryć swoje błędy. Najbardziej preferowana loteria to zatem $ZE \prec IA \prec LT$, bo $p_{ZE} = 1, p_{IA} = 0.8, p_{LT} = 0.2$. Obliczymy $\alpha \in [0,1]$ dla której $IA \approx (LT, \alpha; ZE, 1-\alpha) := \hat{L}^{\alpha}$, a więc wykażemy, że Aksomat Ciągłości działa w tym przypadku. Innymi słowy kontrolowany powninien być obojętny między pewnym wyborem mec. Iced Americano i losowego wyboru między mec. Zimne Espresso i mec. Latte. Znajdziemy takie α. Oczywiście

$$p_{IA} = 0.8 \quad \textit{oraz} \quad p_{\hat{L}^{\alpha}} = 1 - \alpha + \alpha 0.2.$$

Mamy więc

$$1 - \alpha + \alpha 0.2 = 0.8 \Leftrightarrow 0.8\alpha = 0.2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Stąd

$$IA \approx (LT, 0.25; ZE, 0.75).$$

Czyli mając dwa algorytmy wyznaczania adytora, pewny audyt mec. Iced Americano i losowy wybór między mec. Latte a mec. Zimne Espresso, kontrolowany będzie obojętny jeśli mec. Latte zostanie wybrany z prawdopodobieństwem 0.25*, a mec. Zimne Espresso z prawdopodobieństwem* 0.75*.*

Znajdziemy teraz redukcję loterii $(LT, 0.25; ZE, 0.75)$. Przy takiej loterii prawdopodobieństeo wykrycia nieprawidłowości:

$$P(A = -1) = 0.25 * 0.2 + 0.75 = 0.8,$$

czyli $(-1, 0.8; 0, 0.2) = IA$ zatem loteria IA upraszcza loterię złożoną $(LT, 0.25; ZE, 0.75)$. Faktycznie $IA \approx (ZE, 0.75; LT, 0.25)$.

Poniżej ostatni aksjomat von-Neumanna-Morgensterna.

Aksjomat 4 (Zastępowalność)**.** *Niech $L_1, L_2, \ldots, L_N \in \mathcal{L}$ będą loteriami prostymi i niech*

$M \in \mathcal{L}$ będzie loterią prostą taką, że $L_j \approx M$ dla pewnego $j = 1, 2, \ldots, N$. Wtedy

$$(L_1, p_1; L_2, p_2; \ldots; L_j, p_j; \ldots, L_N, p_N) \approx (L_1, p_1; L_2, p_2; \ldots; M, p_j; \ldots, L_N, p_N).$$

Aksjomat o Zastępowalności oznacza, że loterie obojętne z punktu widzenia preferencji decydenta można wzajemnie zastępować w loteriach złożonych, mimo że mogą się one różnić.



Rysunek 3: Inny sposób komunikacji. Efekt końcowy ten sam. Postacie fikcyjne stworzone przez AI.

Przykładowo dwaj audytorzy mają odmienne style komunikacji z kontrolowanym, ale stawiają identyczne wymagania i są przez niego oceniani jednakowo. Z punktu widzenia jego preferencji nie ma więc znaczenia, który z nich przeprowadzi kontrolę (patrz ilustracja powyżej).

4 Istnienie użyteczności na loteriach

Przypomnijmy, zbiór wyników na $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Niech $\mathscr{L}$ będzie zbiorem loterii złożonych.

Definicja 11. *Mówimy, że $u : \mathscr{L} \mapsto \mathbb{R}$ jest **funkcją użyteczności** na $\mathscr{L}$ **reprezentu-***

jącą preferencje $\preceq$ *jeśli*

$$\forall_{\hat{L}_1 \in \mathscr{L}, \hat{L}_2 \in \mathscr{L}} \hat{L}_1 \preceq \hat{L}_2 \Leftrightarrow u(\hat{L}_1) \leq u(\hat{L}_2).$$

Definicja 12. *Mówimy, że funkcja użyteczności reprezentująca preferencje* $u : \mathscr{L} \mapsto \mathbb{R}$ *jest* ***liniowa*** *jeśli dla każdej loterii złożonej* $\hat{L} = (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N)$

$$u(\hat{L}) = q_1 u(L_1) + q_2 u(L_2) + \ldots + q_N u(L_N). \tag{3}$$

Kolejny lemat pokazuje, że przy założeniu Aksjomatu o Redukcji, do wykazania liniowości wystarczy użyteczności wystarczy wykazać liniowość na loteriach prostych.

Lemat 2. *Niech* $\preceq \in \Pi$ *spełnia Aksjomat o Redukcji i załóżmy ponadto, że* $u : \mathscr{L} \mapsto \mathbb{R}$ *reprezentuje tą użyteczność. Jeśli dla każdego* $(p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$ *i* $L = (a_1, p_1; \ldots, a_n, p_n)$ *zachodzi*

$$u(L) = p_1 u(a_1) + p_2 u(a_2) + \ldots + p_n u(a_n),$$

to u jest użytecznością liniową.

Dowód. Niech

$$\hat{L} = (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots; L_N, q_N),$$

oraz niech

$$L_j = (a_1, p_1^j; \ldots; a_n, p_n^j).$$

Wtedy z liniowości na loteriach prostych mamy

$$\sum_{j=1}^{N} q_j u(L_j) = \sum_{j=1}^{N} q_j \sum_{k=1}^{n} p_k^j u(a_k) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} q_j p_k^j u(a_k). \tag{4}$$

Z definicji, redukcja loterii $\hat{L}$ spełnia

$$m(\hat{L}) = (a_1, r_1; \ldots; a_n, r_n),$$

gdzie

$$r_k = \sum_{j=1}^{N} q_j p_k^j.$$

Zatem z liniowości o na loteriach prostych zastosowanej do $m(\hat{L})$, oraz z (4) mamy

$$u(m(\hat{L})) = \sum_{k=1}^{n} r_k u(a_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} q_j p_k^j u(a_k) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} q_j p_k^j u(a_k) = \sum_{j=1}^{N} q_j u(L_j).$$

Z Aksjomatu o Redukcji wiemy, że $u(m(\hat{L})) = u(\hat{L})$, stąd mamy (3). Zatem u jest liniowa. □

Sformułujemy główne twierdzenie.

Twierdzenie 4 (Użyteczność von Neumanna-Morgensterna)**.** *Załóżmy, że preferencje* $\preceq \in \Pi$ *spełniają Aksjomaty von Neumanna-Morgensterna. Wtedy istnieje liniowa użyteczność na* $\mathscr{L}$ *reprezentująca* $\preceq$*.*

Dowód. Ponieważ numeracja elementów z X może zostać dowolnie ustalona, bez straty ogólności zakładamy $a_1 \preceq a_2 \preceq \ldots \preceq a_n$. Zakładamy również, że $a_1 \prec a_n$. Przypadek $a_1 \approx a_n$ zostanie rozpatrzony na koniec.

1. Niech $a_k \in X$ będzie dowolnym wynikiem. Wtedy z Twierdzenia 3 wynika, że istnieje α^k taki, że spełniony jest warunek

   $$a_k \approx (a_n, \alpha^k; a_1, 1 - \alpha^k).$$

2. Niech $\hat{L} \in \mathscr{L}$ będzie postaci $\hat{L} = (L_1, q_1; \ldots; L_N, q_N)$, dla $L_j = (a_1, p_1^j; \ldots; a_n, p_n^j)$. Dla

   $$r_k = q_1 p_k^1 + \ldots + q_N p_k^N,$$

   definujemy

   $$u(\hat{L}) = r_1\alpha^1 + r_2\alpha^2 + \ldots + r_n\alpha^n.$$

   W szczególności prosta loteria $L := (L, 1)$ postaci $L = (a_1, p_1; a_2, p_2; \ldots; a_n, p_n)$

spełnia warunek: $r_k = p_k$ i wtedy

$$u(L) = p_1\alpha^1 + p_2\alpha^2 + \ldots + p_n\alpha^n; \tag{5}$$

3. Pokażemy, że każda złożona loteria $\hat{L} \in \mathscr{L}$ spełnia,

$$\hat{L} \approx (a_n, u(\hat{L}); a_1, 1 - u(\hat{L})).$$

Niech $\hat{L} = (L_1, q_1; L_2, q_2; \ldots, L_N, q_N)$, $L_j = (a_1, p_1^j; a_2, p_2^j; \ldots; a_n, p_n^j)$ i jak poprzednio

$$r_k := q_1 p_k^1 + q_2 p_k^2 + \ldots + q_N p_k^N \quad \text{gdzie} \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Z Aksjomatu o Redukcji

$$\hat{L} \approx (a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n).$$

Oznaczmy $M_k = (a_n, \alpha^k; a_1, 1 - \alpha^k)$ i z definicji α^k, $a_k = (a_k, 1) \approx M_k$. Aksjomat o Zastępowalności zastosowany n krotnie do powyższej relacji daje po kolei:

$$(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n) \approx (M_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n) \approx \ldots \approx (M_1, r_1; M_2, r_2; \ldots; M_n, r_n).$$

Zatem

$$\hat{L} \approx (M_1, r_1; M_2, r_2; \ldots; M_n, r_n) := \hat{L}'.$$

Loterie na $M_1, M_2, \ldots, M_n$ są skupione na $\{a_n, a_1\}$, stąd $m(\hat{L}')$ też koncentruje się na $\{a_n, a_1\}$. Wtedy prawdopodobieństwo, że $m(\hat{L}')$ da a_n wynosi

$$\begin{aligned} r^* &= r_1\alpha^1 + r_2\alpha^2 + \ldots + r_n\alpha^n \\ &= r_1 u(a_1) + r_2 u(a_2) + \ldots + r_n u(a_n) \\ &= u(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n) = u(\hat{L}). \end{aligned}$$

Otrzymujemy $m(\hat{L}') = (a_n, u(\hat{L}); a_1, 1 - u(\hat{L}))$. Ponieważ $\hat{L}' \approx \hat{L}$, Aksjomat o

Redukcji daje

$$\hat{L} \approx (a_n, u(\hat{L}); a_1, 1 - u(\hat{L})).$$

4. Pokażemy, że u jest funkcją użyteczności. Niech $\hat{L}_1 \preceq \hat{L}_2$. Wtedy z poprzedniego punktu wiemy, że

$$(a_n, u(\hat{L}_1); a_1, 1 - u(\hat{L}_1)) \approx \hat{L}_1 \preceq \hat{L}_2 \approx (a_n, u(\hat{L}_2); a_1, 1 - u(\hat{L}_2)).$$

Z Aksjomatu Monotoniczności, powyższa relacja (między skrajnymi wyrazami) implikuje $u(\hat{L}_1) \leq u(\hat{L}_2)$. Odwrotnie, załóżmy, że $u(\hat{L}_1) \leq u(\hat{L}_2)$. Wtedy Aksjomat monotoniczności daje

$$(a_n, u(\hat{L}_1); a_1, 1 - u(\hat{L}_1)) \preceq (a_n, u(\hat{L}_2); a_1, 1 - u(\hat{L}_2)).$$

Stąd i z poprzedniego punktu wiemy, że

$$\hat{L}_1 \approx (a_n, u(\hat{L}_1); a_1, 1 - u(\hat{L}_1)) \preceq (a_n, u(\hat{L}_2); a_1, 1 - u(\hat{L}_2)) \approx \hat{L}_2,$$

czyli $\hat{L}_1 \preceq \hat{L}_2$;

5. Na koniec pokażemy, że użyteczność u jest liniowa. Dla wyniku a_k można przypisać loterię prostą $(a_k, 1)$, stąd z (5) dla ciągu $(p_1, \ldots, p_n)$ takiego, że $p_k = 1$ i $p_j = 0$ dla $j \neq k$ mamy $u(a_k) = \alpha^k$. Stąd z (5) mamy

$$u(L) = p_1 u(a_1) + p_2 u(a_2) + \ldots + p_n u(a_n).$$

Z Lematu 2 wynika, że u jest użytecznością liniową.

Załóżmy teraz, że $a_1 \approx a_n$. każdy wynik a_k byłby tak samo preferowany i wystarczyłoby zdefiniować funkcję stałą jako użyteczność. Zatem dla $k = 2, ..., n-1$ mamy

$$a_1 \preceq a_k \preceq a_n \preceq a_1.$$

Z przechodniości relacji wynika zatem, że $a_k \preceq a_1$. Zakładaliśmy również, że $a_k \succeq a_1$. Stąd $a_k \approx a_1$. Podobnie wykazujemy $a_k \approx a_n$. Z Faktu 2 wynika, że $\approx$ jest relacją przechodnią. Stąd wszystkie elementy X są tak samo preferowane. Weźmy dowolną loterię prostą $L = (a_1, p_1; \ldots; a_n, p_n)$. Stosując $n-1$-krotnie Aksjomat Zastępowalności do a_1 i a_j po kolei dla $j > 1$ mamy

$$L = (a_1, p_1; \ldots; a_n, p_n) \approx (a_1, p_1; \ldots; a_1, p_n) = \left(a_1, \sum_{k=1}^{n} p_k\right) = (a_1, 1),$$

czyli ponownie z Faktu 2 każde dwie loterie proste są obojętne. Podobnie pokażemy, że każde dwie loterie złożone są obojętne. Stąd wystarczy przyjąć dowolną funkcję stałą i będzie ona liniową funkcją użyteczności. □

Uwaga 3. *Jeśli $u : \mathscr{L} \mapsto \mathbb{R}$ jest użytecznością reprezentującą preferencje $\preceq$, a $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest dowolną śliśle rosnącą funkcją, to $v \circ u(\cdot)$ również jest użytecznością reprezentującą preferencje $\preceq$, choć niekoniecznie jest liniowa, nawet wtedy gdy $u(\cdot)$ jest liniowa. Natomiast jeśli $u : \mathscr{L} \mapsto \mathbb{R}$* ***jest liniową użytecznością reprezentującą preferencje*** *$\preceq$, a $v(x) = Ax + B$ dla $A > 0$ i $B \in \mathbb{R}$ to użyteczność*

$$v \circ u(x) = A\,u(x) + B$$

również ***jest liniową użytecznością reprezentującą preferencje*** *$\preceq$.*

Twierdzenie 4 implikuje następującą własność.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że preferencje $\preceq \in \Pi$ spełniają są Aksjomaty von Neumanna-Morgensterna. Wtedy dla dowolnej pary loterii $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ podany warunek*

$$L_1 \prec L_2$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej loterii $M \in \mathcal{L}$ i $\alpha \in (0, 1)$ mamy

$$(L_1, \alpha; M, 1-\alpha) \prec (L_2, \alpha; M, 1-\alpha). \tag{6}$$

Dowód. Twierdzenie 4 gwarantuje istnienie liniowej użyteczności u na $\mathscr{L}$. Niech $L_j = (a_1, p_1^j; \ldots; a_n, p_n^j)$ dla $j = 1, 2$ i $M = (a_1, \pi_1; \ldots; a_n, \pi_n)$. Dla loterii $Q_j := (L_j, \alpha; M, 1-\alpha)$ rozpatrujemy redukcję w postaci $m(Q_j) = (a_1, r_1^j; \ldots; a_n, r_n^j)$, gdzie

$$r_k^j = \alpha p_k^j + (1-\alpha)\pi_k.$$

Zatem z Aksjomatu o Redukcji i z liniowości u mamy

$$\begin{aligned} u(Q_j) = u(m(Q_j)) &= \sum_{k=1}^{n} r_k^j u(a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha p_k^j + (1-\alpha)\pi_k) u(a_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} p_k^j u(a_k) + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{n} \pi_k u(a_k) \\ &= \alpha u(L_j) + (1-\alpha) u(M). \end{aligned}$$

Stąd z warunku $L_1 \prec L_2$, który jest równoważny warunkowi $u(L_1) < u(L_2)$, wynika, że $u(Q_1) < u(Q_2)$, czyli $Q_1 \prec Q_2$ niezależnie od loterii M. Odwrotnie, z $Q_1 \prec Q_2$, co jest równoważne $u(Q_1) < u(Q_2)$ wynika $u(L_1) < u(L_2)$, czyli $L_1 \prec L_2$. □

5 Dyskusja o aksjomatach

Matematyczna elegancja aksjomatów von Neumanna–Morgensterna nie przesądza o ich zgodności z rzeczywistymi zachowaniami. Liczne obserwacje pokazują, że decyzje podejmowane w warunkach niepewności mogą naruszać te aksjomaty. Przedstawione zostaną przykłady z literatury, a na końcu także ponownie Przykład 3.

Przykład 6 (Paradoks Allais)**.** *W swoich badaniach Allais analizował 4 loterie:*

$$L_1 = (1mln, 1),$$
$$L_2 = (5mln, 0.1; 1mln, 0.89; 0, 0.01),$$
$$L_3 = (1mln, 0.11; 0, 0.89),$$
$$L_4 = (5mln, 0.1; 0, 0.9).$$

Wyniki wskazują

$$L_1 \succ L_2 \quad oraz \quad L_4 \succ L_3.$$

Ale to przeczy istnienia użyteczności von-Neumanna i Morgensterna w tym problemie. Uzasadnimy ten fakt. Załóżmy, że $L_1 \succ L_2$ *i że gracze grają zgodnie z użytecznością von-Neumanna-Morgensterna. Wprowadźmy loterie pomocnicze*

$$K = \left(5mln, \frac{10}{11}; 0, \frac{1}{11}\right), \quad \delta_1 = (1mln, 1) \quad oraz \quad \delta_0 = (0, 1).$$

Zauważmy, że loterie można wyrazić jako

$$L_1 = (\delta_1, 0.11; \delta_1, 0.89),$$
$$L_2 \approx (K, 0.11; \delta_1, 0.89),$$

Stosując Twierdzenie 5, wnioskujemy, że ponieważ $L_1 \succ L_2$*, musi być również zależność* $\delta_1 \succ K$*. Druga para to*

$$L_3 \approx (\delta_0, 0.89; \delta_1, 0.11),$$
$$L_4 \approx (\delta_0, 0.89; K, 0.11).$$

Wcześniej ustaliliśmy, że $\delta_1 \succ K$ więc ponownie z Twierdzenia 5 wnioskujemy $L_3 \succ L_4$, co przeczy eksperymentowi Allais. Zatem eksperyment Allais wskazuje, że wielu graczy nie zachowuje się zgodnie z aksjomatami von-Neumanna-Morgensterna.

Mógł zajść następujący mechanizm.

- Gracze nie chcieli ryzykować utratę pewnego miliona na rzecz 5 mln.
- Gdy jednak dochodzi dodatkowe ryzyko przegranej w obu wariantach, możliwość wygrania 5 mln, była wystarczającą motywacją do zmiany preferencji.

Wracamy do przykładu z audytem.

Przykład 7 (Audyt w urzędzie, c.d.)**.** *Zgodnie z Przykładem 3 mamy preferencje*

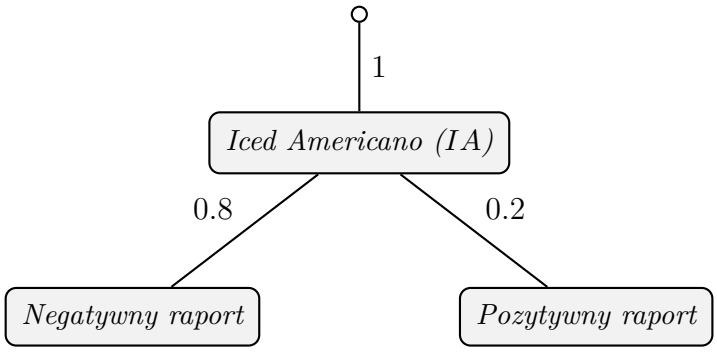
$$ZE \prec IA \prec LT.$$

W przykładzie 5, w który, kontynuowano rozważenia Przykładu 3 wykazano

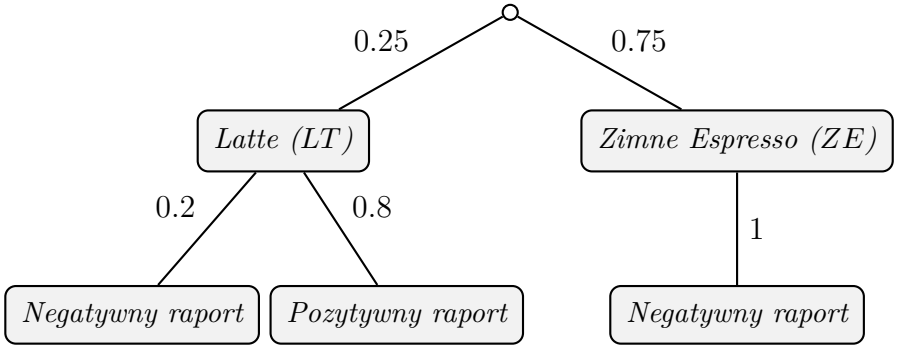
$$IA \approx (LT, 0.25; ZE, 0.75).$$

Poniżej ilustracja graficzna obu sposobów wyboru.

- *Deterministyczny wybór IA:*



- *Losowy wybór między LT i ZE z prawdopodobieństwami odpowiednio* 0.25 *i* 0.75*:*



Zgodnie z aksjomatem redukcji loterii złożonych decydent powinien być obojętny między procedurami losowania prowadzącymi do tego samego rozkładu prawdopodobieństwa wyników końcowych.

W praktyce jednak tak być nie musi. Dla kierownika znaczenie może mieć nie tylko ostateczny wynik audytu, lecz także moment, w którym dowie się, kto przeprowadzi kontrolę. Może on preferować wcześniejsze rozstrzygnięcie niepewności, nawet jeśli nie zmienia ono prawdopodobieństw poszczególnych wyników. Inna osoba może natomiast preferować późniejsze rozstrzygnięcie, ponieważ pozwala ono dłużej zachować nadzieję na korzystny wynik. ***Nie można zatem traktować aksjomatów jako pewnik w każdej możliwej sytuacji.***

Literatura

[1] Miao., J. (2013). Economic Dynamics in Discrete Time. MIT. Press.

[2] Maschler, M., Solan, E, Zamir, S. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press.