

# Koalicje i podział zysków

27 stycznia 2023



Gra w jest w postaci funkcji charakterystycznej  $(N, \nu)$ :

- 1 Zbiór graczy to  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- 2 Każdy podzbiór  $S \subset N$ , (również pusty) nazywamy koalicją, a  $N$  nazwiemy Wielką Koalicją;
- 3  $\nu(S)$  oznacza wartość koalicji  $S$ :
  - $\nu(\emptyset) = 0$  - koalicja pusta nie ma żadnej wartości (nikomu nie zaszkodzi i nikomu nie pomoże);
  - (Superaddytywność) Jeśli  $S_1 \subset N$  i  $S_2 \subset N$ , oraz  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  to  $\nu(S_1 \cup S_2) \geq \nu(S_1) + \nu(S_2)$  (połączenie sił nie zaszkodzi, a może nawet pomóc).

Pytania:

- 1 Jakie koalicje mogą być zawarte i jakie będą trwałe?
- 2 Jak sprawiedliwie podzielić zyski między koalicjantów?
- 3 A w ogóle co to znaczy "sprawiedliwie"?

Niech  $(x_1, \dots, x_n)$  będzie alokacją Wielkiej Koalicji. Podstawowe cechy sprawiedliwego podziału to:

- **Racjonalność indywidualna:**  $x_i \geq \nu(\{i\})$  dla wszystkich  $i$  (w przeciwnym razie gracz  $i$  wyjdzie z koalicji);
- **Racjonalność grupowa:**  $\nu(N) = \sum_{i=1}^n x_i$  (np. w państwach skorumpowanych ta cecha nie występuje);

Alokację o powyższych cechach nazywamy **imputacją**.

- **Racjonalność koalicyjna** dla wszystkich koalicji  $S \subset N$ :

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S),$$

w przeciwnym razie, koalicja  $S$  opuści Wielką Koalicję i gracze z  $S$  na tym zyskają.

Zbiór imputacji o powyższej cesze nazywamy **rdzeniem**.

- Rdzeń może być pusty
  - podział dolara: koalicjanci proponowali alokacje odbijając się od ściany do ściany np.  $(1/2, 1/2, 0)$ ,  $(0, 1/2, 1/2)$  i  $(1/2, 0, 1/2)$ , ale nigdy nie osiągnęli porozumienia;
  - "sprawiedliwy" podział dolara to  $(1/3, 1/3, 1/3)$  okazał się nie do utrzymania.
- Twierdzenie Bondarjewa stanowi kiedy rdzeń jest niepusty.

Dla każdej gry  $(N, \nu)$  szukamy "sprawiedliwej" alokacji  
 $(x_1, \dots, x_n) = (\phi_1(\nu), \phi_2(\nu), \dots, \phi_n(\nu))$

- Zmienną jest tu  $\nu$ , a zbiór graczy jest ustalony.
- Zatem każdej dla wartości gry  $\nu$  obliczamy pewną alokację.

## Kilka pojęć

- Gracze  $i \in N$  i  $j \in N$  są **symetryczni** jeśli dla każdej koalicji  $C \subset N$  takiej, że  $i \notin C$  i  $j \notin C$ ,

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}),$$

czyli mają identyczny wkład dla każdej koalicji;

- Gracz  $i \in N$  jest **nieistotny** jeśli dla każdej koalicji  $S \subset N$ ,

$$v(S) = v(S \setminus \{i\}),$$

czyli taki gracz, który nic nie wnosi do żadnej koalicji.

## Definicja

Dla dwóch gier w postaci charakterystycznych  $(N, \nu_1)$  i  $(N, \nu_2)$  definiujemy **sumę gier**  $(N, \nu_1 + \nu_2)$  w naturalny sposób:

$$(\nu_1 + \nu_2)(S) := \nu_1(S) + \nu_2(S),$$

dla wszystkich  $S \subset N$ ;

## Uwaga

Suma gier superaddytywnych jest superaddytywna.

## Uwaga

Przez alokację zawsze rozumiemy podział  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  taki, że

$$\sum_{i=1}^n x_i = \nu(N).$$

## Aksjomaty Shapleya

Sprawiedliwe alokacje w Wielkiej Koalicji powinny spełniać następujące aksjomaty:

- 1 **Indywidualna racjonalność:** dla każdego  $i$ ,  $\phi_i(\nu) \geq \nu(\{i\})$ ;
- 2 **Brak dyskryminacji:** niech  $i, j \in N$  będą graczami symetrycznymi. Wtedy  $\phi_i(\nu) = \phi_j(\nu)$ ;
- 3 **Wynagrodzenie wyłącznie za wkład:** jeśli gracz  $i$  jest nieistotny, to  $\phi_i(\nu) = 0$ .
- 4 **Addytywność:**  $\phi_i(\nu_1 + \nu_2) = \phi_i(\nu_1) + \phi_i(\nu_2)$ .

## Podział dolara

Podział dolara dla Adama (a), Boba (b), Charliego:

$$\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = \nu(\{c\}) = 0,$$

oraz

$$\nu(\{b, c\}) = \nu(\{a, c\}) = \nu(\{b, c\}) = 1.$$

Z aksjomatów Shapleya, Adam (A), Bob (B) i Charlie (C) powinni otrzymać po równo, ponieważ są parami symetryczni:

- Adam i Bob są symetryczni: jedyne koalicje bez nich to  $\emptyset$  i  $\{C\}$ . Ponieważ  $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$  oraz  $\nu(\{c, a\}) = \nu(\{c, b\}) = 1$ , zatem Adam i Bob są symetryczni, więc otrzymują po równo.
- Podobnie wykażemy, że Bob i Charlie są symetryczni, zatem również otrzymają tyle samo, zatem  $(1/3, 1/3, 1/3)$  to jedyny sprawiedliwy podział dolara.

## Twierdzenie

Istnieje jedyna alokacja spełniająca Aksjomaty Shapleya i wyraża się wzorem:

$$\phi_i(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\{S:i \in S\}} (|S| - 1)(n - |S|)[\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\})],$$

dla dowolnego  $i \in N$ , gdzie  $|S|$ - moc zbioru  $S$ .

## Konstrukcja kombinatoryczna

Gracze dołączają po kolei do koalicji. Możliwości jest  $n!$ , a kolejność jest losowa.

- Ustawiamy losowo graczy w ciąg (na  $n!$  sposobów.)
- Dla ustalonej permutacji  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  każdy z graczy jest wynagradzany w zależności od wniesionego wkładu: gracz  $i_1$  otrzyma  $\nu(\{i_1\})$ , gracz  $i_2$  otrzyma  $\nu(\{i_1, i_2\}) - \nu(\{i_1\})$ , ..., gracz  $i_k$  otrzyma  $\nu(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) - \nu(\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\})$ , ..., a gracz  $i_n$  otrzyma  $\nu(N) - \nu(N \setminus \{i_n\})$ ;
- **Wartość Shapleya** to wartość oczekiwana wynagrodzenia dla każdego gracza, przy założeniu, że każda permutacja jest jednakowo prawdopodobna. (VERTE)

## Konstrukcja kombinatoryczna

Wyprowadzenie wzoru:

- Zdarzenie  $\mathcal{E}_i(S)$  oznacza, że  $i$  otrzymał wypłatę za dołączenie jako ostatni do koalicji  $S$ ;
- $S \mapsto \{\mathcal{E}_i(S) : i \in S\}$  rodzina zbiorów rozłącznych:  $S_1 \neq S$  wtedy  $\mathcal{E}_i(S_1) \cap \mathcal{E}_i(S) = \emptyset$ ;
- Oczekiwana wypłata dla  $i$  to

$$E\Phi_i = \sum_{S:i \in S} E[\Phi_i | \mathcal{E}_i(S)] P(\mathcal{E}_i(S))$$

(VERTE)

Wyprowadzenie wzoru:

- Zdarzenie  $\mathcal{E}_i(S)$  zajdzie na  $(|S| - 1)!(n - |S|)!$  sposobów
  - poprzednicy z  $S$  mogą zmienić kolejność, ale nadal muszą stać przed  $i$ ;
  - następnicy są już spoza  $S$  i mogą zmienić kolejność, ale nadal muszą stać za  $i$ ;
- Czyli

$$P(\mathcal{E}_i(S)) = \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!}.$$

- Ale  $E(\Phi_i | \mathcal{E}_i(S)) = \nu(S) - \nu(S \setminus \{i\})$  (prawie napewno);
- Mamy więc wartość Shapleya:

$$\begin{aligned} E\Phi_i &= \sum_{S:i \in S} E[\Phi_i | \mathcal{E}_i(S)] P(\mathcal{E}_i(S)) \\ &= \sum_{S:i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\})]. \end{aligned}$$

## Algorytm obliczania wartości Shapleya

Na bazie konstrukcji kombinatorycznej

- wypisujemy wszystkie możliwe permutacje,
- sumujemy wypłaty poszczególnych graczy
- dzielimy otrzymaną wartość przez  $n!$

# Przykład:

$\nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 0$ ,  $\nu(12) = 5$ ,  $\nu(13) = 2$ ,  $\nu(23) = 3$ ,  
 $\nu(123) = 6$ .

Kolejność	Wkład 1	Wkład 2	Wkład 3
123	0	5	1
132	0	4	2
213	5	0	1
231	3	0	3
312	2	4	0
321	3	3	0
suma	13	16	7
<b>W.Shapleya</b>	$13/6 = 2.1666$	$16/6 = 2.666$	$7/6 = 1.1666$

## Uwaga

Wartość Shapleya może, ale nie musi należeć do rdzenia, nawet jeśli rdzeń jest niepusty. Wykażemy, że dla gry z poprzedniego slajdu:  $\nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 0$ ,  $\nu(12) = 5$ ,  $\nu(13) = 2$ ,  $\nu(23) = 3$ ,  $\nu(123) = 6$ , rdzeń jest niepusty, ale nie zawiera wartości Shapleya. Rdzeń spełnia

$$\begin{cases} x + y + \phantom{z} \geq 5, & x \geq 0 \\ x + \phantom{y} + z \geq 2, & y \geq 0 \\ \phantom{x} + y + z \geq 3, & z \geq 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Do rdzenia należy np.  $(3, 3, 0)$ , czyli rdzeń jest niepusty, ale wartość Shapleya  $(13/6, 16/6, 7/6)$  do niego nie należy. (VERTE)

## Uwaga

- Wybór  $(13/6, 16/6, 7/6)$  to rozwiązanie "sprawiedliwe" nastawione na uczciwe wynagradzanie za wkład;
- Wybór  $(3, 3, 0)$  to rozwiązanie "siłowe", bo mimo gracz 3 wnosi coś do koalicji, nie zostanie doceniony, bo nie ma siły przebicia.