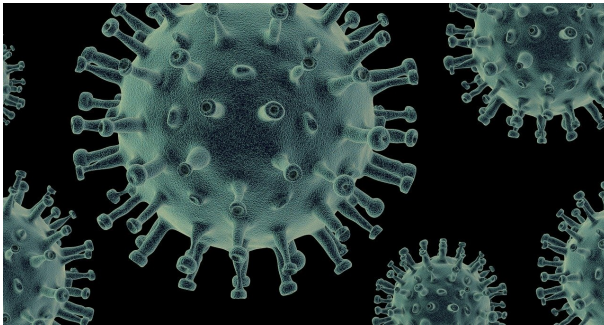


Wstęp do teorii użyteczności.

March 29, 2020



Konsument

- ma do dyspozycji n dóbr;
- każde dobro $i = 1, 2, \dots, n$ może skosztować w ilości $x_i \geq 0$;
- wektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ nazywamy *koszykiem konsumpcyjnym*;
- ma przypisaną funkcję $u : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}_+$ nazywaną **funkcją użyteczności**;
- $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy **użytecznością**, lub **poziomem satysfakcji** konsumenta z koszyka konsumpcyjnego (x_1, x_2, \dots, x_n) ;
- zakładamy, że u jest rosnąca względem wszystkich współrzędnych;

Generalnie, aby sensownie opisać model konsumpcji dóbr nie wystarczy, żeby u była rosnąca z uwagi na następujące zjawiska:

- konsument nie ceni zbytńio dobra, którego ma pod dostatkiem, nawet jeśli jest niezbędne (np. ludzie wyżej cenią złoto niż wodę);
- ten sam transfer gotówki zrobi większe wrażenie na biednym, a mniejsze wrażenie na bogatym: (np. dodatkowe 500 zł. zrobi wrażenie na bezrobotnym, a nie zrobi wrażenia na prezesie firmy notowanej na GPW);
- z tego samego powodu, gdy np. na rynku kraje zwiększają wydobycie ropy, zwiększa się cena za baryłkę;
- inaczej smakuje woda po spacerze po rozgrzanej ulicy, a inaczej smakuje pod koniec przyjęcia lub bankietu, gdzie wszystkiego było pod dostatkiem;

Powyższe zjawiska prowadzą do sformułowania następującego postulatu.

Postulat

Mamy jedno dobro w ilości x . Mając okazję zwiększyć konsumpcję o poziom Δ , **wzrost poziomu satysfakcji $u(x + \Delta) - u(x)$ powinien maleć wraz z x .**

Funkcja użyteczności

- Funkcja liniowa $u(x) = ax$ nie spełnia ww *postulatu*, bo

$$u(x + \Delta) - u(x) = a\Delta,$$

czyli **wzrost poziomu satysfakcji nie zależy od ilości dóbr, które konsument dotąd konsumował, a jedynie od wzrostu konsumpcji;**

- Funkcja kwadratowa $u(x) = ax^2$ również nie spełnia *postulatu*, bo

$$u(x + \Delta) - u(x) = a\Delta(2x + \Delta),$$

bo tu jest na odwrót: **wzrost poziomu satysfakcji rośnie wraz ze z ilością dotychczasowego stanu posiadania;**

- Ale $u(x) = \sqrt{x}$ (podobnie jak każda inna funkcja ściśle wklęsła) spełnia *postulat*, ponieważ

$$u(x + \Delta) - u(x) = \sqrt{x + \Delta} - \sqrt{x} = \frac{\Delta}{\sqrt{x + \Delta} + \sqrt{x}} \text{ maleje z } x.$$

Krańcowa użyteczność

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $u : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ oraz, że jest to funkcja różniczkowalna.

Krańcowa użyteczność

$u'(x)$ jest nazywana **krańcową użytecznością** z konsumpcji dobra w ilości x . **Krańcową użytecznością** oznaczmy jako $mu(x)$

Zachodzi

$$u(x + \Delta) - u(x) = u'(x)\Delta + o(\Delta) = mu(x)\Delta + o(\Delta),$$

czyli

$$\frac{u(x + \Delta) - u(x)}{\Delta} \approx u'(x) = mu(x) \quad \text{gdy } \Delta \approx 0.$$

Interpretacja krańcowej użyteczności

Gdy konsument decyduje się

- na zwiększenie konsumpcji zasobów w ilości x o **krańcowo małą** ilość Δ , to zmieni swoją konsumpcję o $u'(x)\Delta$;
- **Krańcowa użyteczność** jest więc przejściem granicznym współczynnika proporcjonalności między zmianą użyteczności (poziomu satysfakcji), a zmianą poziomu konsumpcji, gdy ta zmiana jest krańcowo mała:

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \Delta) - u(x)}{\Delta};$$

- Matematycznie jest to pochodna.

I Prawo Gossena

Krańcowa użyteczność z konsumpcji dobra w ilości x jest ściśle malejąca względem x .

- Wyczerpany i spragniony konsument jest gotowy zapłacić 5 zł za małą szklankę wody;
- Po wypiciu wody, kolejna taka sama mała szklanka nie robi już na nim takiego wrażenia i będzie gotowy zapłacić 1 zł.;
- Funkcja użyteczności jest ściśle wklęsła.

Jeśli jednostkę dobra można zakupić po cenie $p > 0$, wtedy korzyść dla konsumenta to użyteczność minus koszty:

$$\pi(x) = u(x) - px.$$

Z I Prawa Gossena wynika, że konsument zakupi tyle dóbr aby krańcowa użyteczność z konsumpcji pokryła się z ceną. (VERTE)

Dla uzasadnienia, przyjmijmy że $mu(x^*) = p$.

A jeśli konsument kupi mniej niż x^*

Gdy zakupi mniej niż x^* , czyli $x^* - \Delta$ ($\Delta > 0$), z I Prawa Gossena

$$mu(x^* - \Delta) > mu(x^*) = p.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}\pi(x^* - \Delta) - \pi(x^*) &= -(u(x^*) - u(x^* - \Delta)) - mu(x^*)\Delta \\ &\approx (mu(x^*) - mu(x^* - \Delta))\Delta < 0,\end{aligned}$$

czyli zakupy w mniejszym wymiarze $x^* - \Delta$ nie dają konsumentowi satysfysakcji. Ma przeczucie, że nie zaspokoił w pełni swoich potrzeb.

A jeśli konsument kupi więcej niż x^*

Gdy zakupi więcej niż x^* , czyli $x^* + \Delta$ ($\Delta > 0$), z I Prawa Gossena

$$mu(x^* + \Delta) < mu(x^*) = p.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}\pi(x + \Delta) - \pi(x) &= -(u(x) - u(x + \Delta)) - mu(x)\Delta \\ &\approx (mu(x + \Delta) - mu(x))\Delta < 0.\end{aligned}$$

$x + \Delta$ daje konsumentowi poczucie, że kupił więcej dobra niż naprawdę potrzebuje.

Mamy n dóbr i funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca. Oznaczmy **krańcową użyteczność** z konsumpcji i tego dobra.

$$mu_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Funkcja użyteczności spełnia I Prawo Gossena gdy wszystkie mu_i są ściśle malejące względem x_i . Ten warunek otrzymamy gdy

$$\frac{\partial mu_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) < 0 \text{ dla wszystkich } x_1 > 0, \dots, x_n > 0.$$

Przykład

Podane funkcje użyteczności spełniają I Prawo Gossena:

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2},$$

bo

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{4}} < 0, \text{ oraz } \frac{\partial u^2}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{4}} < 0.$$

Przykład

Podana funkcja użyteczności spełnia I Prawo Gossena:

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2},$$

bo

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4} \sqrt{x_2 x_1}^{-\frac{3}{4}} < 0, \text{ oraz } \frac{\partial u^2}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{4} \sqrt{x_1 x_2}^{-\frac{3}{4}} < 0.$$

Przykład

Podana funkcja użyteczności nie spełnia I Prawa Gossena:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

bo kranńcowe użyteczności

$$mu_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 1, \text{ oraz } mu_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1$$

są stałe.

Przykład

Podana funkcja użyteczności nie spełnia I Prawa Gossena:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

bo krańcowe użyteczności są stałe względem odpowiednich współrzędnych

$$mu_1 = x_2, \text{ oraz } mu_2 = x_1.$$

Innymi słowy

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial mu_2}{\partial x_2} = 0.$$

Przykład

Podana funkcja użyteczności nie spełnia I Prawa Gossena względem dobra nr 1:

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + \sqrt{x_2},$$

bo krańcowa użyteczność rośnie względem zmiennej x_1

$$mu_1 = 2x_1,$$

Innymi słowy

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} = 2 > 0.$$

Krzywe obojętności

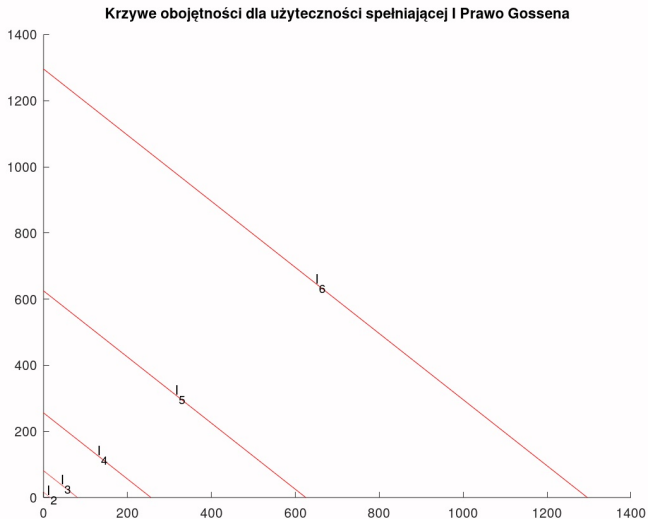
Krzywe obojętności to zbiory punktów dla których użyteczność jest taka sama:

$$I_k = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = k\}.$$

Przykładowo, krzywe obojętności dla $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 + x_2}$ to:

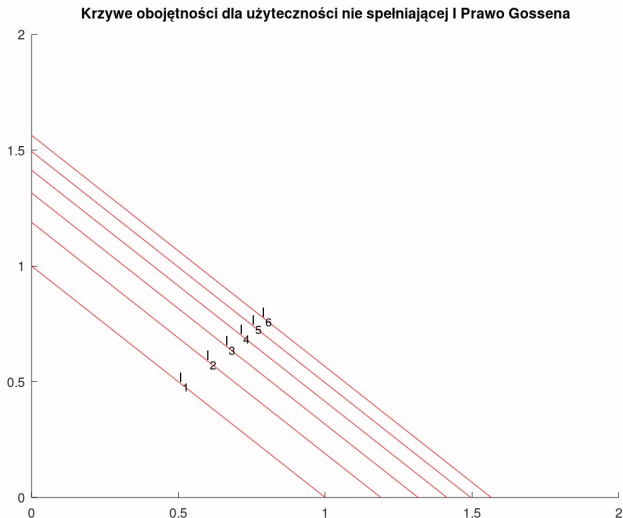
$$I_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \sqrt[4]{x_1 + x_2} = k\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 = k^4\}$$

Przerzedzające się krzywe obojętności, gdy I Prawo Gossena jest spełnione



- Sąsiednie krzywe obojętności oddalają się od siebie wraz ze wzrostem poziomu satysfakcji k ;
- Zatem im większy poziom satysfakcji, tym trudniej osiągnąć wyższy poziom satysfakcji, bo potrzeba większych nakładów konsumpcyjnych.
- Bogatego trudniej zadowolić niż biednego;
- Przeciwnie zjawisko zaobserwujemy dla krzywej $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^4$, która nie spełnia I Prawa Gossena, tu krzywe się zagęszczają (VERTE).

Zagęszczające się krzywe obojętności, gdy I Prawo Gossena nie jest spełnione - ilustracja



Krańcowa stopa substytucji

Dla koszyka konsumpcyjnego $x \in \mathbb{R}^n$, **krańcową stopą substytucji** dobra i na dobro j nazywamy

$$M_{i,j}(x) = -\frac{mu_j(x)}{mu_i(x)}.$$

Mamy n dóbr, koszyk konsumpcyjny $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i ustalmy dwa dobra i i j .

- decydujemy się na zmianę konsumpcji dobra i o Δ_i i zmianę dobra j o Δ_j ;
- nowy koszyk konsumpcyjny

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j + \Delta_j, x_{j+1}, \dots, x_n);$$

- Δ_i i Δ_j jest wybierana w taki sposób aby oba koszyki "stary" i "nowy" były tak samo użyteczne tzn. $u(x) = u(x')$, czyli aby były na tej samej krzywej obojętności;
- interesuje nas graniczna wartość $\frac{\Delta_i}{\Delta_j}$

Mamy więc

$$0 = u(x') - u(x) = mu_i(x)\Delta_i + mu_j(x)\Delta_j + o\left(\sqrt{\Delta_i^2 + \Delta_j^2}\right),$$

czyli

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \approx -\frac{mu_j(x)}{mu_i(x)}.$$

Uwaga

Krańcowa stopa substytucji to graniczna wartość powyższego wyrażenia, czyli stosunku przyrostu dóbr i do j w taki sposób, aby użyteczność nie została zmieniona.

Wprowadzenie:

- konsument zamierza nabyć koszyk dóbr $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ z których czerpie użyteczność w wysokości $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- konsument nabywa jednostkę dobra i po cenie p_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- II prawo Gossena odpowiada na pytanie jak rozkładają się ceny dóbr w stosunku do krańcowych użyteczności;

II Prawo Gossena

W celu osiągnięcia maksymalnej korzyści konsument stara się rozdzielić środki finansowe na zakup poszczególnych dóbr, aby stosunki ich krańcowych użyteczności były równe stosunkowi ich cen.

II Prawo Gossena oznacza, że optymalny koszyk konsumpcyjny $x^* \in \mathbb{R}$ musi spełniać równości:

$$\frac{mu_i(x^*)}{mu_j(x^*)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*)}{\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*)} = \frac{p_i}{p_j}$$

dla $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Konsument został obdarowany kwotą $m > 0$, którą w całości przeznaczy na zakup dóbr $i = 1, 2, \dots, n$ po cenach p_1, p_2, \dots, p_n wtedy maksymalizuje

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = m.$$

II Prawo Gossena - ilustracja

Warunek konieczny dla optymalnego koszyka $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ jest tożsamy z ekstremum warunkowym i punktem siodłowym funkcji Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \left(m - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)$$

Po zróżniczkowaniu i przyrównaniu do 0, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) otrzymamy

$$\forall_{i=1,2,\dots,n} m u_i(x^*) = \lambda p_i \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = m.$$

co daje po podzieleniu stronami

$$\frac{m u_i(x^*)}{m u_j(x^*)} = \frac{p_i}{p_j},$$

czyli **II Prawo Gossena**.

Niech $u : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ będzie użytecznością z konsumpcji jednego dobra. Mamy dobro w ilości x i okazję do spożycia dodatkowej ilości dobra w wysokości Δ .

- **Względnym przyrostem konsumpcji** nazywamy wielkość:

$$R_x^\Delta := \frac{\Delta}{x}.$$

- **Względnym przyrostem użyteczności** nazywamy wielkość:

$$R_u^\Delta := \frac{u(x + \Delta) - u(x)}{u(x)}.$$

Elastyczność funkcji

Wielkość

$$\mathcal{E}_u(x) := \frac{xu'(x)}{u(x)}$$

nazywamy **elastycznością funkcji użyteczności** u z konsumpcji x .

Mamy więc

$$R_u^\Delta = \frac{u(x + \Delta) - u(x)}{u(x)} \approx \frac{u'(x)}{u(x)} \Delta = \frac{xu'(x)}{u(x)} \frac{\Delta}{x} = \frac{xu'(x)}{u(x)} R_x^\Delta$$

czyli

$$R_u^\Delta = \mathcal{E}_u(x) R_x^\Delta$$

lub równoważnie

$$\mathcal{E}_u(x) \approx \frac{\frac{u(x+\Delta) - u(x)}{u(x)}}{\frac{\Delta}{x}} = \frac{R_u^\Delta}{R_x^\Delta}.$$

- **Krańcowa użyteczność** jest graniczną wartością stosunku między **przyrostem użyteczności**, a **przyrostem konsumpcji**.
- **Elastyczność** jest graniczną wartością stosunku między **względny przyrostem użyteczności**, a **względny przyrostem konsumpcji**.

- **Krańcowa użyteczność** jest stała dla funkcji liniowej $u(x) = ax$ i $mu(x) = a$
- **Elastyczność** jest stała dla funkcji potęgowej, w szczególności dla funkcji **Cobba-Douglassa** $u(x) = ax^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$):

$$\mathcal{E}_u(x) = x \frac{\alpha ax^{\alpha-1}}{ax^\alpha} = \alpha.$$

- **Krańcowa użyteczność:** miara wrażliwości użyteczności na zmianę konsumpcji;
- **Elastyczność:** miara **względnej** wrażliwości użyteczności na **względną** zmianę konsumpcji.

Elastyczność użyteczności

Gdy mamy n dóbr, analogicznie definiujemy elastyczność funkcji z konsumpcji dobra i .

Elastyczność

Niech $u : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}_+$ wtedy elastyczność z użyteczności dobra i , $i = 1, 2, \dots, n$ definiujemy jako.

$$\mathcal{E}_{u_i}(x) := x_i \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{u(x)}.$$

Przykład

Niech

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Wtedy $\mathcal{E}_{u_i}(x)$ są wielkościami stałymi i równymi

$$\mathcal{E}_{u_i}(x) = \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$