KONTRAKTY FORWARD I FUTURES - WYCENA

Przypomnienie z matematyki finansowej.

Zainwestowano wartość A na n lat po stopie procentowej R. Ile to dobro będzie warte po n latach?

- Gdy odsetki kapitalizowane są raz w roku wartość inwestycji po n latach wyniesie
$$A(1+R)^n.$$
- Gdy odsetki kapitalizowane są 2 razy w roku wartość inwestycji po n latach wyniesie
$$A\left(1+\frac{R}{2}\right)^{2n}.$$
- itd.
- Gdy odsetki kapitalizowane są m razy w roku wartość inwestycji po n latach wyniesie
$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}.$$

A gdy liczba kapitalizacji dąży do ∞?

- Wtedy mamy do czynienia z kapitalizacją ciągłą i wtedy przyszła wartość wyniesie:
$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} = \underline{Ae^{Rn}}$$
gdzie $e \approx 2.71828$.

Przykład: lokujemy 100 dolarów po stopie 10%. Po roku nasza inwestycja da wyniki:

Częstość kapitalizacji	**Lokata po roku**
Roczna $m = 1$	110,00
Półroczna $m = 2$	110,25
Kwartalna $m = 4$	110,38
Miesięczna $m = 12$	110,47
Tygodniowa $m = 52$	110,51
Dzienna $m = 365$	110,52
Ciągła $m \to \infty$	110,52

Zatem zysk z lokaty zależy nie tylko od stopy procentowej, ale i od częstości kapitalizacji odsetek.

Definicja 1 *Dane są dwie roczne stopy procentowe R_1 i R_2 przy różnej częstotliwości kapitalizacji odsetek. Mówimy, że są* ***równoważne*** *jeśli dają w przyszłości tą samą wartość kapitału.*

Równoważność stóp: wyprowadzenie wzoru:

- Niech R_1 będzie roczną stopą przy m krotnej kapitalizacji, a R_2 roczną stopą przy kapitalizacji ciągłej. Zatem, aby **stopy były równoważne** musi zachodzić wzór:

$$A\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{m\,n} = Ae^{R_2 n}.$$

Po podzieleniu obustronnym przez A i wzięciu $\sqrt[n]{\cdot}$ mamy

$$\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{m} = e^{R_2}.$$

Dalsze elementarne rachunki dadzą dwie zależności:

$$R_1 = m\ln\left(1+\frac{R_2}{m}\right).$$

oraz

$$R_2 = m\left(e^{\frac{R_1}{m}}-1\right).$$

Narzędzia umożliwiające strategie arbitrażowe

1. Krtka sprzedaż.
2. Operacja repo.

Definicja 2 (Krótka sprzedaż.) *Polega na sprzedaży aktywów, które nie należą do inwestora z obowiązkiem odkupienia ich w przyszłości:*

Inwestor zleceniodawca zleca brokerowi krótką sprzedaż aktywa tzn.

- *Broker pożycza aktywo od innego klienta i sprzedaje aktywo w imieniu zleceniodawcy.*
- *Zleceniodawca zobowiązuje odkupić aktywo aktywo w przyszłości. Z reguły robi to w dogodnym dla siebie momencie (kiedy aktywo wystarczająco stanieje).*
- *Jeśli aktywo w tym czasie przynosi dochody (np. dywidendy, kupony) zleceniodawca płaci prawowitemu właścicielowi ich równowartość.*
- *Zleceniodawca może czekać z decyzją odkupienia dopóki broker ma możliwość pożyczania ten sam rodzaj aktywa od innego klienta.*

- *Gdy broker straci tę możliwość, zleceniodawca zmuszony jest natychmiast odkupić aktywo (nawet jeśli nie jest to dla niego opłacalne)*

Przykład 1 *Jan Kowalski robi interesy na akcjach KGHM (różne warianty)*

1. *1 lipca 2012 roku Jan Kowalski składa zlecenie "krótkiej sprzedaży" 500 akcji KGHM.*
2. *Broker "pożycza" 500 akcji i w imieniu Kowalskiego sprzedaje je po kursie z 1 lipca 2012 roku czyli 146 zł za akcję. Jan Kowalski otrzymuje na konto 146 *500=73.000 zł.*
3. *Jan Kowalski utrzymał swoją pozycję do 12 lipca. Akce KGHM spadły wtedy do 117 zł za akcję.*
4. *Kowalski odkupuje 500 akcji i płaci za nie 117 *500=58.500 zł. i akcje oddaje brokerowi.*
5. *Kowalski zarabia więc*
$$73.000 - 58.500 = 14.500zl.$$
W okresie od 1-12 lipca s-ka KGHM.SA nie płaciła dywidendy.

Przykład 2

1. *Ten sam przykład, z tym że tym razem Jan Kowalski postanowił, że nie zadowoli się zyskiem 14.500 zł. Czeka aż akcje jeszcze bardziej spadną.*
2. *24 lipca akcje jeszcze bardziej spadły do 111 zł. Ale ten dalej utrzymuje swoją pozycję.*
3. *18 października broker informuje Jana Kowalskiego, że nie ma już od kogo pożyczać akcji KGHM i zobowiązuje Kowalskiego do odkupienia akcji.*
4. *Niestety w tym dniu akcje podskoczyły do 168 zł więc Jan Kowalski musi załacić*
$$168 * 500 = 84.000zl.$$
czyli kupił po cenie o 11.000 zł. większej niż wcześniejszy zysk ze sprzedaży.
5. *Ale to nie koniec strat. Za dzień 16.07.2012 KGHM płaciła dywidendy po cenie 28,34 zł. za akcję, więc Jan Kowalski musi wypłacić właścicielowi akcji równowartość strat czyli* $28,34 * 500 = 14.170$. *Zostaje więc ze stratą* ***25.170 zł.***

Definicja 3 (Operacja repo) *Operacje repo (repurchase agreement) s to operacje warunkowego zakupu, które polegają na zakupie przez instytucję finansową (np. bank centralny) od inwestora komercyjnych papierów wartościowych, zobowiązując je jednocześnie do odkupienia tych papierów po określonej cenie (wyższej niż sprzedaż) i w określonym terminie.*

$$STOPA\ REPO =$$
$$= \frac{CENA\ WYKUPU - CENA\ SPRZEDA\dot{Z}Y}{CENA\ SPRZEDA\dot{Z}Y}.$$

w przypadku gdy inwestor nie odkupi papieru wartościowego, instytucja finansowa zatrzymuje papiery wartościowe.
Innymi słowy operacja repo jest to wzięcie kredytu po stopie repo pod zastaw papierów wartościowych.

ZAŁOŻENIA:

1. Koszty transakcji są równe zero.
2. Zyski kapitałowe opodatkowane są wg tej samej stopy procentowej.
3. Uczestnicy rynku mogą pożyczać i udzielać pożyczki wg tej samej stopy wolnej od ryzyka (np. stopa *repo*).
4. Uczestnicy rynku wykorzystują strategie arbitrażowe przy każdej nadarzającej się okazji.

NOTACJA W KONTRAKTACH FORWARD

- T - okres pozostający do daty dostawy
- S - aktualna cena aktywów pierwotnych
- K - cena dostawy aktywów
- f bieżąca wartość długiej pozycji (w momencie zawarcia kontraktu f=0)
- F aktualna cena kontraktu (w momencie zawarcia kontraktu F=K)
- r aktualna stopa wolna od ryzyka przy kapitalizacji ciągłej (możemy brać kredyt lub założyć lokatę po tej stopie)

Problem: Ile powinna wynosić aktualna cena kontraktu (=dostawy)?
Idea strategii arbitrażowych:

- Jeśli cena dostawy będzie za wysoka:

i kupujemy aktywo po cenie rynkowej

ii sprzedajemy (zajmujemy pozycję krótką) kontrakt forward.

- Jeśli cena dostawy będzie za niska (szansa łatwego zysku dla posiadacza):

  i sprzedajemy aktywo po cenie rynkowej (jeśli go nie posiadamy to zlecamy krótką sprzedaż)

  ii kupujemy (zajmujemy pozycję długą) kontrakt forward.

  Cena dostawy ma uniemożliwić strategię arbitrażową.

Wycena w kontraktach forward na papiery nie przynoszące okresowego dochodu

Czyli

- akcje nie dające dywidendy,
- lub obligacje zerokuponowe np. bony skarbowe.

Ile powinna wynieść cena terminowa, aby nie było arbitrażu?

Co może zrobić inwestor z pozycji krótkiej:

i bierze kredyt na zakup aktywa po cenie S

ii wykonuje dostawę po cenie F

iii po czasie T spłaca dług Se^{rT}

iv czysty zysk bez ryzyka wyniesie $F - Se^{rT}$.

Zatem żeby nie było arbitrażu musi być $F \leq Se^{rT}$.

Co może zrobić inwestor z pozycji długiej:

i dokonuje krótkiej sprzedaży aktywa po cenie S

ii kwotę S daje na lokatę po stopie r

iii po czasie T odbiera lokatę w wysokości Se^{rT}

iv przyjmuje dostaę i płaci F.

v czysty zysk bez ryzyka wyniesie $Se^{rT} - F$

Zatem $Se^{rT} \leq F$, co w konsekwencji daje

Wzr na cen terminową aktywa w kontrakcie forward:

$$\boxed{F = Se^{rT}.}$$

Przykład 3 *Mamy 3 miesięczny kontrakt forward na zakup akcji. Bieżąca cena akcji wynosi 40$, a stopa wolna od ryzyka wynosi 0.05 w skali roku czyli* 5%. *Cena kontraktu wynosi 43$.*

Rozwiązanie: cena kontraktu powinna być $40 * e^{0.05*0.25} = 40,5\$$. *Poniewa.z* $F = 43\$$, *cena jest więc zawyżona!*
Strategia arbitrażowa:

1. *Bierzemy 3 miesięczny kredyt na zakup akcji* $40\$$ *po stopie* r.
2. *Kupujemy akcje po cenie* $40\$$
3. *Zawieramy kontrakt na sprzedaż akcji.*
4. *Po trzech miesiącach wykonujemy dostawę i dostajemy* $43\$$.
5. *Spłacamy dług* $40e^{0.05*0.25} = 40,5\$$.
6. *Zysk wynosi* $43 - 40,5 = 2,5\$$.

Przykład 4 *Mamy 3 miesięczny kontrakt forward na zakup akcji. Bieżąca cena akcji wynosi 40$, a stopa wolna od ryzyka wynosi 0.05 w skali roku czyli* 5%. *Cena kontraktu wynosi 39$.*

Rozwiązanie: cena kontraktu powinna być $40 * e^{0.05*0.25} = 40,5\$$. *Poniewa.z* $F = 39\$$, *cena jest więc zaniżona! Zatem strategia arbitrażowa to:*

1. *Sprzedajemy krótko akcję po cenie* $40\$$.
2. *Zysk umieszczamy na lokacie po stopie* 5%.
3. *Zawieramy kontrakt na kupno akcji.*
4. *Zamykamy lokatę i otrzymujemy* $40e^{0.05*0.25} = 40,5\$$.
5. *Po trzech miesiącach przyjmujemy dostawę i płacimy* $39\$$.
6. *Zysk wynosi* $40,5 - 39 = 1,5\$$.

Wycena w kontraktach forward aktywów o znanych dochodach.

- Gdy w czasie $t \in [0, T]$ wypłacana jest dywidenda D, wtedy bieżąca jej wartość jest $e^{-rt}D$.
- Bieżąca cena kontraktu (dostawy) wynosi Fe^{-rT}.
- Cena aktywa S musi być zrównoważyć przyszłe dochody zatem

  $$S = e^{-rt}D + Fe^{-rT}$$

  zatem

$$\boxed{F = (S - e^{-rt}D)e^{rT} = Se^{rT} - De^{r(T-t)}}$$

Strategia arbitrażowe przy zawyżonej cenie kontraktu: $F > Se^{rT} - De^{r(T-t)}$

i Bieżemy kredyt w wysokości S i kupujemy aktywo

ii Po czasie t otrzymujemy dywidendę D, którą umieszczamy na lokacie po stopie r

iii Sprzedajemy kontrakt na zakup aktywa po cenie F.

iv Wykonujemy dostawę i otrzymujemy F (stan konta =F)

v Spłacamy dług w wysokości Se^{rT} (stan konta $=F - Se^{rT}$)

vi Zamykamy lokatę i otrzymujemy $De^{r(T-t)}$ (stan konta $=F - Se^{rT} + De^{r(T-t)} > 0$)

Strategia arbitrażowe przy zaniżonej cenie kontraktu: $F < Se^{rT} - De^{r(T-t)}$

i Dokonujemy krótkiej sprzedaży aktywa po cenie S

ii Umieszczamy S na lokacie po stopie r

iii Kupujemy kontrakt na zakup aktywa po cenie F

iv Po czasie t musimy zapłacić dywidendę D. W tym celu bieżemy kredyt.

v Po czasie T zamykamy lokatę i otrzymujemy z banku Se^{rT} (stan konta $=Se^{rT}$)

vi Spłacamy kredyt w wysokości $De^{r(T-t)}$ (stan konta $=Se^{rT} - De^{r(T-t)}$)

vii Przyjmujemy dostawę i płacimy F (stan konta $=Se^{rT} - De^{r(T-t)} - F > 0$)

Strategia arbitrażowe przy zaniżonej cenie kontraktu: $F < Se^{rT} - De^{r(T-t)}$ (druga możliwość)

i Dokonujemy krótkiej sprzedaży aktywa po cenie S

ii Otwieramy dwie lokaty: pierwsza na okres t i umieszczamy na niej $e^{-rt}D$

iii , a druga na okres T i umieszczamy resztę kwoty $S - e^{-rt}D$ (po stopie r)

iv Kupujemy kontrakt na zakup aktywa po cenie F

iv Po czasie t zamykamy pierwszą lokatę i otrzymujemy D. Ale musimy ją oddać brokerowi.

v Po czasie T zamykamy drugą lokatę i otrzymujemy z banku

$$(S - e^{-rt}D)e^{rT} = Se^{rT} - De^{r(T-t)}$$

i to jest stan naszego konta

vii Przyjmujemy dostawę i płacimy F (stan konta $= Se^{rT} - De^{r(T-t)} - F > 0$)

Ogólny wzór gdy w okresach t_1, t_2, ..., $t_n \in [0,T]$ są wypłacane dywidendy w wysokości odp. D_1, D_2, ...,D_n:

$$\boxed{F = Se^{rT} - \sum_{i=1}^{n} D_i e^{r(T-t_i)}}.$$

Równoważnie:

$$\boxed{F = (S - I)e^{rT}}.$$

gdzie

$$I = \sum_{i=1}^{n} D_i e^{-rt_i}$$

jest nazywane bieżącą wartością dywidend.
Rozważmy roczny kontrakt na akcje, których aktualna cena wynosi 100\$. Dywidendy wypłacane są po 3 miesiącach 6 miesiącach i 9 miesiącach w wysokościach odpowiednio 5\$, 4\$ i 3\$. Stopa wolna od ryzyka wynosi 0.05%. Ile wynosi cena kontraktu?

Odp. Mamy $T = 1$, $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.5$ $t_3 = 0.75$, $D_1 = 5$, $D_2 = 4$, $D_3 = 3$, $S = 100\$$, $r = 0.05$ oraz

$$F = 100e^{0,05*1} - 5e^{0,05(1-0,25)} -$$

$$4e^{0,05(1-0,5)} - 3e^{0,05(1-0,75)} = 92.80$$

Zadanie Spróbuj wymyślić strategię arbitrażową gdy

a $F = 100$

b $F = 90$