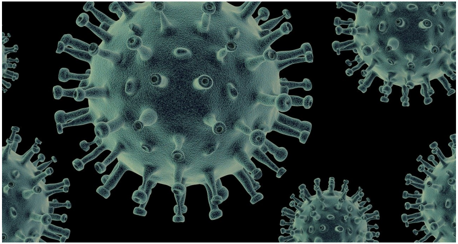
Model międzyokresowej użyteczności: uogólnienia

Łukasz Balbus

Uniwersytet Zielonogórski

May 6, 2020



Ogólne sformułowanie modelu:

- Rozważamy model międzyokresowej użyteczności;
- Tym razem konsument ma dostęp do obu rynków: kredytowego i inwestycyjnego.

Ogólne sformułowanie modelu.

Konsument:

- Dzisiaj ma dochód nominalny m_1, jutro m_2;
- Da konsumpcję przeznaczy c_1, a na inwestycję i;
    1. Jeśli dzisiejsze plany konsumpcyjno-inwestycyne przekroczą dochód nominalny, konsument pożyczy z banku brakującą kwotę po stopie r
    2. Jeśli natomiast plany konsumpcyjno-inwestycyne będą mogły być w całości sfinansowane przez dochód nominalny, konsument odłoży nadwyżkę na konto oszczędnościowe, dla ustalenia uwagi również po stopie r;
- Cały jutrzejszy kapitał: jutrzejszy dochód nominalny, zaoszczędzone pieniądze i dochód z inwestycji przeznaczy na konsumpcję.

Ogólne sformułowanie modelu.

- Dzisiaj konsument zarabia m_1, planuje konsumpcję c_1 i inwestycję i.
  1. Jeśli $c_1 + i > m_1$, to konsument pożyczy $c_1 + i - m_1$, a jutro spłaci $(c_1 + i - m_1)(1 + r)$;
  2. Jeśli $c_1 + i < m_1$, to konsument odłoży $c_1 + i - m_1$, a jutro wybierze $(m_1 - i - c_1)(1 + r)$;
  3. Tak jak w poprzednim modelu, przychód z inwestycji wyniesie $f(i)$;
- Jutro cały zgromadzony kapitał $m_2 + f(i) + (m_1 - i - c_1)(1 + r)$ zostanie przeznaczony na konsumpcję:

$$c_2 = m_2 + f(i) + (m_1 - i - c_1)(1 + r)$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1(1 + r) + c_2 + i(1 + r) = (1 + r)m_1 + m_2 + f(i).$$

- Użyteczność ze ścieżki konsumpcyjnej $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ to $u(c_1, c_2)$.

Matematyczne sformułowanie modelu.

Mamy więc problem

$$\max_{c_1, i, c_2} u(c_1, c_2)$$

przy ograniczeniach

$$c_1(1+r) + c_2 + i(1+r) = (1+r)m_1 + m_2 + f(i), \quad c_1, c_2, i \geq 0.$$

W języku matematyki finansowej:

- wartość konsumpcji i inwestycji na jutro równoważy, wartości jutrzejsze wartości dochodów i przychodów inwestycyjnych.

Założenia wklęsłości dla u i f pozostają w mocy.

1. Również można problem rozwiązać na dwa sposoby
    - Wstawiając jawnie c_2 do funkcji użyteczności (zazwyczaj kłopoltiwe rachunkowo), lub;
    - Stosując mnożniki Lagrange'a i Twierdzenie Kuhna-Tuckera.

Przykład

Przykład

Konsument, żyjący dwa okresy ma dostęp do rynku kredytowego i inwestycyjnego. Stopa oprocentowania lokat i kredytów wynosi r, a funkcja inwestycji $f(i) = \sqrt{i}$. Konsument dysponuje dzisiejszym dochodem w wysokości $m_1 = m$, a jutro nie będzie miał żadnych dochodów niezwiązanych z inwestycją, czyli $m_2 = 0$. Przyjmijmy, że jego dwuokresowa użyteczność wyraża się wzorem $u(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2}$. Znajdź optymalną ścieżkę konsumpcyjną i inwestycję.

Rozwiązanie

Funkcja Lagrange'a jest postaci:

$$\mathcal{L}(\lambda, c_1, i, c_2) = \sqrt{c_1 c_2} + \lambda\left((1+r)m + \sqrt{i} - c_1(1+r) - c_2 - i(1+r)\right).$$

Liczymy pochodne:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{c_2}{2\sqrt{c_1 c_2}} - \lambda(1+r),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 c_2}} - \lambda,$$

oraz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} = \left(\frac{1}{2\sqrt{i}} - (1+r)\right)\lambda,$$

pamiętając o ograniczeniu:

$$(1+r)m + \sqrt{i} - c_1(1+r) - c_2 - i(1+r) = 0$$

Rozwiązanie CD

Mamy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{2\sqrt{c_1 c_2}} = \lambda(1+r) \\ \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 c_2}} = \lambda \\ \frac{1}{2\sqrt{i}} = (1+r) \\ (1+r)m + \sqrt{i} = c_1(1+r) + c_2 + i(1+r) \end{cases}$$

Podzielę stronami dwa pierwsze równania

$$\frac{\frac{c_2}{2\sqrt{c_1 c_2}}}{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1 c_2}}} = (1+r) \Leftrightarrow c_2 = (1+r)c_1.$$

Dalej z trzeciego równania

$$i^* = \frac{1}{4(1+r)^2}$$

To oraz $c_2 = (1+r)c_1$ wstawiam do ostatniego i obliczam c_1:

$$(1+r)m + \frac{1}{2(1+r)} = c_1(1+r) + c_1(1+r) + \frac{1}{4(1+r)}$$

stąd łatwo obliczamy

$$c_1^* = \frac{(1+r)m + \frac{1}{4(1+r)}}{2(1+r)},$$

i dalej

$$c_2^* = \frac{(1+r)m + \frac{1}{4(1+r)}}{2}.$$

Rozwiązanie CD

To obliczyliśmy (c_1^*, i^*, c_2^*) to kandydat na rozwiązanie. Łatwo widać, że funkcja ograniczeń jest wklęsła podobnie jak u. Stąd sprawdzimy tylko czy mnożnik Lagrange'a jest dodatni. Ale są, bo z drugiego równania

$$\lambda^* = \frac{c_1^*}{2\sqrt{c_1^* c_2^*}} > 0$$

co widać od razu, bo $c_1^* > 0$. Stąd ścieżka

$$(c_1^*, c_2^*) = \left(\frac{(1+r)m + \frac{1}{4(1+r)}}{2(1+r)}, \frac{(1+r)m + \frac{1}{4(1+r)}}{2} \right),$$

jest optymalna podobnie jak inwestycja

$$i^* = \frac{1}{4(1+r)^2}.$$

Wielookresowa użyteczność.

Naturalnym uogólnieniem jest model gdy konsument żyje n okresów i czerpie użyteczność $u(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ z całej ścieżki konsumpcyjnej.

- W kroku 1, planuje konsumpcję c_1 i inwestycję i_1 mając dochód nominalny m_1 i możliwość wzięcia kredytu, lub ulokowania kwoty po identycznej stopie r, a także wzięcia inwestycji dającej przychód $f(i_1)$;
- Jutrzejszy majątek $m_2 + f(i_1) + (m_1 - i_1 - c_1)(1 + r)$ dzieli również na konsumpcję i inwestycję na trzeci okres;
- Ogólnie w okresie k jego majątek wynosi: $m_k + f(i_{k-1}) + (m_{k-1} - i_{k-1} - c_{k-1})(1 + r)$, który również przeznacza na konsumpcję c_k i inwestycję i_k na okres $k + 1$;
- Dopiero w ostatnim okresie n cały majątek jest przeznaczony na konsumpcję

$$c_n = m_n + f(i_{n-1}) + (m_{n-1} - i_{n-1} - c_{n-1})(1 + r);$$

Matematyczne sformułowanie problemu

$$\max u(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} (1+r)c_1 + c_2 + (1+r)i_1 = m_1(1+r) + m_2 + f(i_1) \\ (1+r)c_2 + c_3 + (1+r)i_2 = m_2(1+r) + m_3 + f(i_2) \\ \dots \\ (1+r)c_k + c_{k+1} + (1+r)i_k = m_k(1+r) + m_{k+1} + f(i_k) \\ \dots \\ (1+r)c_{n-1} + c_n + (1+r)i_{n-1} = m_{n-1}(1+r) + m_n + f(i_{n-1}) \\ c_n = m_n + f(i_{n-1}) + (m_{n-1} - i_{n-1} - c_{n-1})(1+r) \end{cases}$$

oraz $c_1, i_1, c_2, i_2, c_3, i_3, \dots, c_{n-1}, i_{n-1}, c_n \geq 0$.

Matematyczne sformułowanie problemu

Również przy wklęsłości u, f i warunkach Innady, możemy znowu pozwiązanie problemu metodą mnożników Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\lambda, c, i) = u(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left(m_k(1+r) + m_{k+1} + f(i_k) - (1+r)c_k - c_{k+1} - (1+r)i_k\right)$$

$$+\lambda_n \left(m_n + m_{n-1}(1+r) + f(i_{n-1}) - i_{n-1}(1+r) - c_{n-1}(1+r) - c_n\right)$$

przy ograniczeniach.

Matematyczne sformułowanie problemu

Również przy wklęsłości u, f i warunkach Innady, możemy znowu pozwiązanie problemu metodą mnożników Lagrange'a: po zróżniczkowaniu dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_k} = \frac{\partial u}{\partial c_k} - (1+r)\lambda_k c_k - \lambda_{k-1} c_k = 0$$

oraz

$$f'(i_k) - (1+r) = 0,$$

a także

$$m_k(1+r) + m_{k+1} + f(i_k) - (1+r)c_k - c_{k+1} - (1+r)i_k = 0,$$

stąd

$$\frac{\partial u}{\partial c_n} = \lambda_n.$$