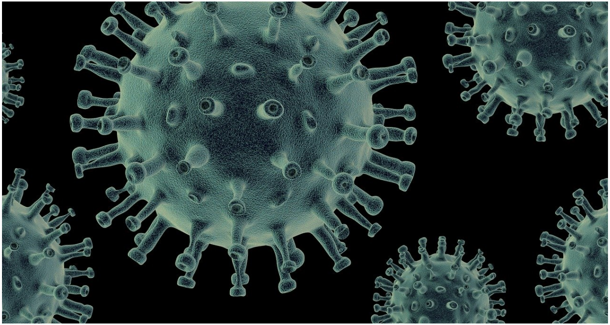
Międzyokresowy wybór konsumenta.

April 15, 2020



Model dwuokresowej użyteczności

Konsument

- Żyje przez dwa okresy (np. dzisiaj i jutro);
- Dzisiaj dysponuje dochodem nominalnym m_1, a jutro m_2;
- Dzisiaj wybiera poziom konsumpcji w wielkości c_1, a jutro c_2;

Model dwuokresowej użyteczności

- Załóżmy, że dzisiaj wybierze poziom konsumpcji $c_1 > 0$:
  - jeĺi c_1 nie przekroczy dochodu nominalnego tzn. $c_1 \leq m_1$ to resztę $m_1 - c_1$ zdeponuje w banku po stopie procentowej $r > 0$ i jutro będzie miał $(m_1 - c_1)(1 + r)$ oszczędności;
  - jeśli przekroczy dochód nominalny tnz. $c_1 > m_1$, to resztę $c_1 - m_1$ musi pożyczyć z banku a jutro będzie miał $(c_1 - m_1)(1 + r)$ długu do spłacenia;
- Jutro otrzyma m_2 dochodu i ma oszczędności lub dług w banku. Całą kwotę którą ma do dyspozycji przeznacza na konsumpcję c_2:
  - jeśli $c_1 \leq m_1$ to ma zaoszczędzone $(m_1 - c_1)(1 + r)$ i dodatkowo m_2 dochodu, a wszystko co ma do dyspozycji przeznacza na konsumpcję

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r)$$

  - jeśli $c_1 > m_1$ to spłaca $(m_1 - c_1)(1 + r)$, zatem skonsumuje

$$c_2 = m_2 - (c_1 - m_1)(1 + r) = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r).$$

Model dwuokresowej użyteczności

Założenie

Funkcja międzyokresowej funkcji użyteczności $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ jest wklęsła oraz klasy C^2.

Wtedy z twierdzenia Kuhna-Tuckera wynika, że (c_1^*, c_2^*) jest optymalną ścieżką konsumpcyjną wtedy i tylko wtedy gdy istnieje nieujemny mnożnik Lagrange'a λ^* taki, że $(c_1^*, c_2^*, \lambda^*)$ jest punktem siodłowym funkcji Lagrange'a

$$\mathcal{L}(\lambda, c_1, c_2) = u(c_1, c_2) + \lambda((1+r)m_1 + m_2 - c_1(1+r) - c_2).$$

Prowadzi to do następującego układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial c_1} u(c_1^*, c_2^*) = \lambda(1+r), \\ \frac{\partial u}{\partial c_2} u(c_1^*, c_2^*) = \lambda, \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Niech $u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Wiemy:

- α - elastyczność z konsumpcji 1 dobra;
- $1 - \alpha$ - elastyczność z konsumpcji 2 dobra.

Po przyrównaniu do zera pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial c_1} u(c_1^*, c_2^*) = \lambda(1+r), \\ \frac{\partial u}{\partial c_2} u(c_1^*, c_2^*) = \lambda, \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stała elastycznoćć użyteczności

Dalej

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\partial u}{\partial c_1} u(c_1^*, c_2^*)}{\frac{\partial u}{\partial c_2} u(c_1^*, c_2^*)} = (1+r), \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stała elastycznoćć użyteczności

Wstawiając $\frac{\partial u}{\partial c_1} = \alpha(c_1^*)^{\alpha-1}(c_2^*)^{1-\alpha}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial c_2} = (1-\alpha)(c_1^*)^{\alpha}(c_2^*)^{-\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha(c_1^*)^{\alpha-1}(c_2^*)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(c_1^*)^{\alpha}(c_2^*)^{-\alpha}} = (1+r), \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} \frac{\alpha c_2^*}{c_1^*(1-\alpha)} = (1+r), \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stała elastycznoćć użyteczności

Wstawiając $\frac{\partial u}{\partial c_1} = \alpha (c_1^*)^{\alpha-1}(c_2^*)^{1-\alpha}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial c_2} = (1-\alpha)(c_1^*)^{\alpha}(c_2^*)^{-\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha (c_1^*)^{\alpha-1}(c_2^*)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(c_1^*)^{\alpha}(c_2^*)^{-\alpha}} = (1+r), \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} c_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1+r)c_1^*, \\ c_1^*(1+r) + c_2^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} c_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1+r)c_1^*, \\ c_1^*(1+r) + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1+r)c_1^* = (1+r)m_1 + m_2. \end{cases}$$

dzisiejsza wartość
jutrzejszegodochodu

Zatem

$$\begin{cases} c_2^* = (1-\alpha)((1+r)m_1 + m_2), \\ c_1^* = \alpha\frac{(1+r)m_1+m_2}{1+r}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = \alpha\left(m_1 + \frac{1}{1+r}m_2\right). \\ c_2^* = (1-\alpha)((1+r)m_1 + m_2) \end{cases}$$

jutrzejsza wartość dzisiejszego dochodu

Konsumpcja dzisiejsza zależy od dzisiejszej wartości dochodów.

Konsumpcja jutrzejsza zależy od jutrzejszej wartości dochodów.

Stała elastycznoćć użyteczności

Ze wzorów

$$\begin{cases} c_1^* = \alpha\left(m_1 + \frac{1}{1+r}m_2\right). \\ c_2^* = (1-\alpha)((1+r)m_1 + m_2), \end{cases}$$

wnioskujemy

- Gdy **dochody nominalne nie zmaleją w obu okresach**, nie zmaleje też **konsumpcja w obu okresach**;
- Gdy wzrośnie **elastyczność** użyteczności względem dobra w pierwszym okresie, co oznacza spadek elastyczności dobra w drugim okresie, **wzrośnie konsumpcja dobra** w pierwszym okresie, a spadnie w drugim;
- Wraz ze **wzrostem stopy procentowej**, spadnie konsumpcja we wcześniejszym okresie na rzecz **konsumpcji w drugim okresie**.

Stała elastycznoćć użyteczności

Matematyczne uzasadnienia powyższych wniosków:

- Gdy **dochody nominalne nie zmaleją w obu okresach**, nie zmaleje też **konsumpcja w obu okresach**:
$$\frac{\partial c_1^*}{\partial m_1} = \alpha > 0 \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial m_1} = \frac{\alpha}{1+r} > 0.$$
- Gdy wzrośnie **elastyczność** użyteczności względem dobra w pierwszym okresie, co oznacza spadek elastyczności dobra w drugim okresie, **wzrośnie konsumpcja dobra** w pierwszym okresie, a spadnie w drugim;
$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} = m_1 + \frac{1}{1+r}m_2 > 0 \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial \alpha} = -m_1 - \frac{1}{1+r}m_2 < 0.$$
- Wraz ze **wzrostem stopy procentowej**, spadnie konsumpcja we wcześniejszym okresie na rzecz **konsumpcji w drugim okresie**.
$$\frac{\partial c_1^*}{\partial r} = -\frac{\alpha m_2}{(1+r)^2} < 0 \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial r} = (1-\alpha)m_1 > 0.$$