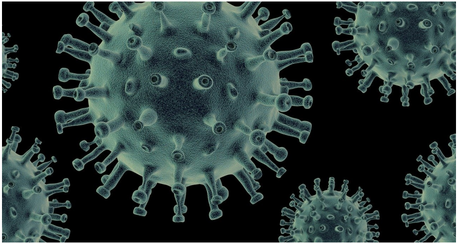
Międzyokresowy wybór konsumenta - rynek inwesycyjny.

April 23, 2020



Międzyokresowy wybór konsumenta - było

Rozważliśmy problem konsumenta planującego bieżącą i przyszłą konsumpcję.

- miał dostęp do rynku kredytowego;
- mógł zatem planować konsumpcję powyżej bieżących zarobków;
- w przyszłości musiał spłacić zaciągnięty kredyt.

Było: model dwuokresowej użyteczności - rynek kredytowy

Konsument

- Żyje przez dwa okresy (np. dzisiaj i jutro);
- Dzisiaj dysponuje dochodem nominalnym m_1, a jutro m_2;
- Dzisiaj wybiera poziom konsumpcji w wielkości c_1, a jutro c_2;
- Może pożyczać, lub lokować pieniądze po tej samej stopie $r > 0$:
  1. jeśli w pierwszym okresie nie wykorzysta wszystkich środków ($c_1 \leq m_1$) to kwotę $m_1 - c_1$ lokuje po stopie r;
  2. jeśli w pierwszym okresie zaplanuje większą konsumpcję niż dochód ($c_1 > m_1$), bierze kredyt $c_1 - m_1$ po stopie r;

Było: model dwuokresowej użyteczności - rynek kredytowy

- Jutro będzie dysponował kwotą $m_2 + (1+r)(m_1 - c_1)$ którą w całości przeznaczy na konsumpcję:

$$c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1);$$

- Wybiera ścieżkę (c_1^*, c_2^*) tak aby funkcja użyteczności $u(c_1, c_2)$ osiągała maksimum przy ograniczeniach $c_1(1+r) + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$, $c_1, c_2 \geq 0$.

Model dwuokresowej użyteczności - rynek kredytowy i inwestycyjny

Gdy konsument miał dostęp do *rynku kredytowego*:

- Mógł efektywniej wykorzystać swoje środki w zależności od swoich potrzeb;
- Miał wybór czy dzisiaj pozwolić sobie na nadwyżkę konsumpcji, czy może lepiej odłożyć konsupcję na jutro.

Omówię model gdy konsument miał dostęp do *rynku inwestycyjnego*:

- Również będzie mógł efektywniej wykorzystać swoje środki w zależności od swoich potrzeb;
- Niewykorzystane środki przeznaczy na *projekt inwestycyjny* o zadanej funkcji inwestycji;
- Tym razem nie będzie miał dostęp do rynku kredytowego i nie będzie mógł żyć ponad stan.

Konsument

- Żyje przez dwa okresy (np. dzisiaj i jutro);
- Dzisiaj dysponuje dochodem nominalnym m_1, a jutro m_2;
- Dzisiaj wybiera poziom konsumpcji w wielkości c_1, a jutro c_2;
- Dzisiaj może zainwestować i w pewien projekt inwestycyjny i oczekuje, jutrzejszego zwrotu z inwestycji w wysokości $f(i)$;

Model dwuokresowej użyteczności

Szczegóły:

- Załóżmy, że dzisiaj wybierze poziom konsumpcji $c_1 > 0$:
  - Tym razem nie może pożyczać pieniędzy i musi wybrać konsumpcję $c_1 \in [0, m_1]$;
  - Niewykorzystane pieniądze $m_1 - c_1$ może zainwestować na jutro w pewien *projekt inwestycyjny*;
  - Jeśli zainwestuje $i = m_1 - c_2$ to jutro otrzyma zysk z projektu (zwrot z inwestycji) w wysokości $f(i)$ (dla uproszczenia inwestycja jest pozbawiona ryzyka);
- Jutro będzie miał do dyspozycji m_2 dochodu i $f(i)$ zwrotu z inwestycji i całość kwoty przeznaczy na jutrzejszą konsumpcję

$$c_2 = m_2 + f(i).$$

- Celem konsumenta jest wybór optymalnej *ścieżki konsumpcyjno-inwestycyjnej* (c_1, i, c_2), czyli takiej dla której $u(c_1, c_2)$ osiąga maksimum.

Założenie

Funkcja międzyokresowej funkcji użyteczności oraz inwestycji spełniają założenia:

- $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ jest rosnąca dla obu zmiennych i jest funkcją wklęsłą;
- funkcja inwestycji $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ również jest rosnąca, wklęsła.

Model dwuokresowej użyteczności

Problem konsumenta - ekstremum warunkowe

Matematyczne sformułowanie modelu konsumenta jest następujące:

- wybieramy ścieżkę konsumpcyjno-inwestycyjną $(c_1^*, i^*, c_2^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ taką, żeby wartość $u(c_1, c_2)$ była największa;
- przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} m_1 - c_1 - i &= 0 \\ m_2 - c_2 - f(i) &= 0 \end{aligned}$$

  $c_1, i, c_2 \geq 0$;
- rozwiązujemy powyższy problem metodą mnożników Lagrange'a.

Model dwuokresowej użyteczności

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\mathcal{L}(\lambda, c_1, i, c_2) = u(c_1, c_2) + \lambda_1(m_1 - c_1 - i) + \lambda_2(m_2 + f(i) - c_2).$$

gdzie teoretycznie konsumpcje i inwestycje mogą nie spełniać warunków brzegowych:

$$c_1 + i = m_1 \quad \text{oraz} \quad c_2 = f(i) + m_2.$$

Zatem mnożniki Lagrange'a interpretujemy jako

- λ_1 - dzisiejszy koszt nadmiernej konsumpcji i wydatków inwestycyjnych, czyli koszt wydatków na konsumpcję i inwestycje przekraczające bieżące dochody;
- λ_2 - jutrzejszy koszt nadmiernej konsumpcji, koszt konsumpcji przekraczającej bieżące dochody i zwrot z inwestycji.

Problem konsumenta - maksimum funkcji jednej zmiennej

Ponieważ konsumpcje i inwestycje są ze sobą ściśle powiązane, problem można równoważnie zredukować do problemu maksimum funkcji jednej zmiennej wg następujących kroków:

- konsumpcja w pierwszym okresie $c_1 \in [0, m_2]$;
- inwestycja z okresu pierwszego na drugi $i = m_1 - c_1$;
- konsumpcja w drugim okresie

$$c_2 = f(i) + m_2 = f(m_1 - c_1) + m_2,$$

- rozwiązujemy problem $\max u(c_1, f(m_1 - c_1) + m_2)$ przy ograniczeniu $c_1 \in [0, m_1]$.

Uwaga

Z uwagi na wklęsłość i monotoniczność u i f, a co za tym idzie wklęsłość funkcji

$$c_1 \mapsto \phi(c_1) := u(c_1, f(m_1 - c_1) + m_2)$$

- problem ma co najmniej jedno optymalne rozwiązanie;
- jeśli ich ma więcej to zbiór rozwiązań będzie odcinkiem;
- Ścieżka konsumpcyjno-inwestycyjna

$$(c_1^*, i^*, c_2^*) = (c_1^*, m_1 - c_1^*, m_2 + f(m_1 - c_1^*))$$

będzie również rozwiązaniem analogicznego problemu ekstrmów warunkowych.

Uwaga CD

- jeśli dodatkowo obie funkcje u i f będą klasy C^1, to w celu obliczenia optymalnej ścieżki (c_1^*, i^*, c_2^*) oraz optymalnej inwestycji wystarczy rozwiązać opniższe równanie:

$$\phi'(c_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial c_1}(c_1, c_2) - \frac{\partial u}{\partial c_2}(c_1, c_2) f'(m - c_1) = 0$$

i wstawić po kolei c_1^* - powyższe rozwiązanie, czyli optymalną konsumpcję, $i^* = f(m_1 - c_1^*)$ - optymalna inwestycja i $c_2^* = f(i^*) + m_2$ - optymalna konsumpcja w drugim okresie.

Uwaga CD

- Równoważnie można obliczyć punkt siodłowy poniższej funkcji metodą mnożników Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\lambda, c_1, i, c_2) = u(c_1, c_2) + \lambda_1(m_1 - c_1 - i) + \lambda_2(m_2 + f(i) - c_2)$$

i obliczamy (c_1^*, i^*, c_2^*) z układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} & = & \frac{\partial u}{\partial c_1}(c_1, c_2) - \lambda_1 & = & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} & = & -\lambda_1 + \lambda_2 f'(i) & = & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} & = & \frac{\partial u}{\partial c_2}(c_1, c_2) - \lambda_2 & = & 0 \\ & & m_1 - c_1 - i & = & 0 \\ & & m_2 - f(i) - c_2 & = & 0 \end{cases}$$

- Z Twierdzenia Kuhna-Tuckera, rozwiązanie powyższego układu (o ile istnieje) będzie rozwiązaniem optymalnym.

- Naturalnym wymaganiem jest aby model nie dopuszczał żeby konsument zachowywał się ekstremalnie, czyli:
  1. rozsądny konsument zawsze przeznaczy pewną kwotę na inwestycję, ale nie zapomni o bieżących potrzebach;
  2. optymalna konsumpcja c_1^* powinna zatem być wewnątrz przedziału $[0, m_1]$, tzn. $0 < c_1^* < m_1$;
  3. Dotychczasowy model nie wyklucza jednak sytuacji gdy $c_1^* = 0$ lub $c_1^* = m$, chyba, że założymy **warunki Innady**.

Warunki Innady

Warunki Innady

Niech $F : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_+$ będzie funkcją różniczkowalną. Mówimy, że F spełnia **warunki Innady** jeśli

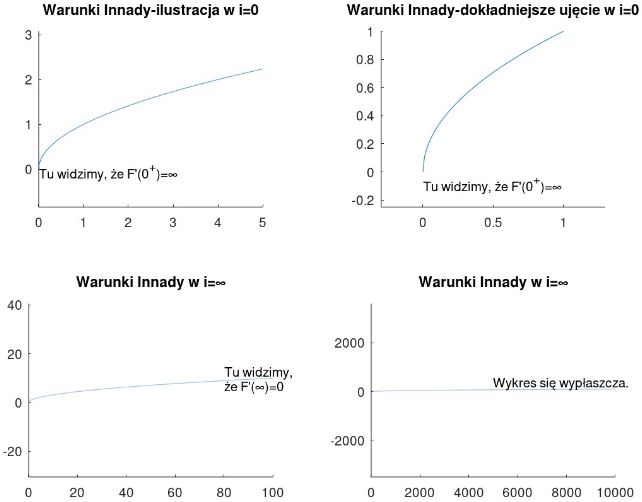
$$F'(0^+) := \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \infty \quad \text{oraz } F'(\infty) := \lim_{x \to \infty} F'(x) = 0.$$

Warunki Innady

Klasyczne przykłady funkcji spełniającej warunki Innady:

$F(x) = x^{\alpha}, \alpha \in (0,1),$ czyli funkcja Cobba-Douglasa, oraz
$F(x) = \ln(x).$

Interpretacja geometryczna warunków Innady



Założenie dodatkowe - warunki Innady

Warunki Innady spełnione są przez:

- funkcję produkcji f;
- funkcja $u(\cdot, c_2)$ przy każdym ustalonym $c_2 > 0$ i $u(c_1, \cdot)$ przy każdym ustalonym $c_1 > 0$.

Łatwo wykazać, że przy założeniu warunków Innady istnieje $c_1^* \in (0, m_1)$ takie, że

$$\phi'(c_1^*) = \frac{\partial u}{\partial c_1}(c_1^*, c_2^*) - \frac{\partial u}{\partial c_2}(c_1^*, c_2^*) f'(i^*) = 0,$$

gdzie $c_2^* = m_2 + f(i^*)$ oraz $i^* = m_1 - c_1^*$, a (c_1^*, i^*, c_2^*) jest scieżką optymalną.

Dokładniej

$$\phi'(c_1) = \frac{\partial u}{\partial c_1}(c_1, m_2 + f(m_1 - c_1))$$
$$-\frac{\partial u}{\partial c_2}(c_1, m_2 + f(m_1 - c_1))f'(m_1 - c_1).$$

Dalej

$$\lim_{c_1 \to 0^+} \phi'(c_1) = \frac{\partial u}{\partial c_1}(0, m_2 + f(m_1))$$
$$-\frac{\partial u}{\partial c_2}(0, m_2 + f(m))f'(m) = \infty,$$

oraz

$$\lim_{c_1 \to m_1^-} \phi'(c_1) = \frac{\partial u}{\partial c_1}(m_1, 1, m_2)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial c_2}(m_1, m_2))f'(0) = -\infty.$$

Konsekwencje warunków Innady

Ponieważ funkcja pochodna ma własność Darboux, musi istnieć $c_1^* \in (0,1)$ takie, że $\phi'(c_1^*) = 0$. Tak obliczona konsumpcja c_1^*, inwestycja $i^* = m_1 - c_1$ oraz $c_2^* = m_2 + f(i^*)$ daje optymalną ścieżkę konsumpcyjno inwestycyjną (c_1^*, c_2^*, i^*).

Przykład

Konsument dysponuje dochodem nominalnym $m_1 = m$ a jutro nie będzie miał żadnych dochodów niezwiązanych z inwestycją, którego funkcja to $f(i) = \sqrt{i}$. Fukcja międzyokresowej użyteczności

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1).$$

Znajdź optymalną ścieżkę konsumpcyjno inwestycyjną.

Przykład - rozwiązanie

Rozwiązanie: 1 sposób: Mamy $m_1 = m$, $m_2 = 0$, oraz $i = m - c_1$, $c_2 = f(i)$ i maksymalizujemy

$$\phi(c_1) = c_1^{\alpha}(\sqrt{m - c_1})^{1-\alpha}.$$

Warto zauważyć, że oba u i f spełniają warunki Innady. Maksimum ϕ będzie osiągnięte w miejscu zerowym pochodnej i w tym samym punkcie co $l(c_1) = \ln(\phi(c_1))$ czyli

$$l(c_1) = \alpha \ln(c_1) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\ln(m - c_1).$$

Po zróżniczkowaniu

$$l'(c_1) = \frac{\alpha}{c_1} - \frac{1}{2(m - c_1)}(1-\alpha) = 0.$$

(VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

Rozwiązanie: 1 sposób: Po przekształceniu:

$$c_1^* = \frac{2\alpha}{1+\alpha} m \in (0, m).$$

Optymalna inwetsycja to $i^* = m - c_1^* = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, a jutrzejsza konsumpcja $c_2^* = \sqrt{i^*} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$. (VERTE)

Rozwiązanie: 2 sposób: Funkcja Lagrangea

$$\mathcal{L}(\lambda, c_1, i, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha} + \lambda_1(m - c_1 - i) + \lambda_2(\sqrt{i} - c_2).$$

Różniczkując po kolei $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i}$ i $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2}$ i uwzględniając warunki brzegowe mamy

$$\begin{cases} \alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{1-\alpha} - \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 \frac{1}{2\sqrt{i}} - \lambda_1 &= 0 \\ (1-\alpha) c_1^{\alpha} c_2^{-\alpha} - \lambda_2 &= 0 \\ m - c_1 - i &= 0 \\ \sqrt{i} - c_2 &= 0 \end{cases}$$

(VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

Dzielę stronami równanie 1 i 3:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1 \\ \frac{1}{\sqrt{i}} = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ (1-\alpha)c_1^{\alpha}c_2^{-\alpha} = \lambda_2 \\ m - c_1 - i = 0 \\ \sqrt{i} = c_2 \end{cases}$$

(VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

Dalej wstawiam $\sqrt{i}$ z czwartego do drugiego, a później $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ z drugiego do pierwszego mamy

$$\begin{cases} c_2 &= \frac{1}{2c_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1 \\ \frac{1}{2c_2} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ (1-\alpha)c_1^{\alpha}c_2^{-\alpha} &= \lambda_2 \\ m - c_1 - i &= 0 \\ \sqrt{i} &= c_2 \end{cases}$$

(VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

Dalej wstawiam c_2 z pierwszego do ostatniego równania

$$\begin{cases} c_2^2 & = & \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1 \\ \frac{1}{2c_2} & = & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ (1-\alpha)c_1^{\alpha}c_2^{-\alpha} & = & \lambda_2 \\ m - c_1 - i & = & 0 \\ i & = & \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1 \end{cases}$$

Ostatnie równanie wstawiam do przedostatniego

$$m - c_1 = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1$$

(VERTE)

Z niego obliczam c_1

$$c_1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} m$$

i mamy

$$\begin{cases} c_1 & = & \frac{2\alpha}{1+\alpha} m \\ c_2 & = & \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m} \\ i & = & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} m \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} & = & \frac{1}{2\sqrt{m}} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \\ \lambda_2 & = & (1-\alpha) \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} m \right)^{\alpha} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m} \right)^{-\alpha} \end{cases}$$

(VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

I ostatecznie

$$\begin{cases} c_1 &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} m \\ c_2 &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m} \\ i &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} m \\ \lambda_1 &= \frac{1-\alpha}{2\sqrt{m}} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} m\right)^{\alpha} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m}\right)^{-\alpha} > 0 \\ \lambda_2 &= (1-\alpha) \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} m\right)^{\alpha} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m}\right)^{-\alpha} > 0 \end{cases}$$

Mnożniki Lagrange'a są dodatnie, a funkcje użyteczności i warunków brzegowych spełniają warunki tw. Kuhna -Tuckera. Stąd scieżka kansumpcyjna

$$\begin{cases} c_1 &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} m \\ i &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} m \\ c_2 &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m} \end{cases}$$

jest optymalna. (VERTE)

Przykład - rozwiązanie CD

Rozwiązanie: 3 sposób jest prawie analogiczny jak drugi: zamiast $u(c_1, c_2)$ można rozpatrzyć $\ln(u(c_1, c_2))$ i postąpić analogicznie.

Przykład

Przykład

Dla danych z poprzedniego przykładu odpowiedz na pytanie jak elastyczność względem bieżącej konsumpcji wyływa na

- bieżącą konsumpcję;
- poziom inwestycji;
- jutrzejszą konsumpcję.

Rozwiązanie: Dla funkcji $u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}$, α jest elastycznością względem bieżących dochodów, a $1 - \alpha$ jest elastycznością względem przyszłych dochodów. Obliczyliśmy wcześniej:

$$\begin{cases} c_1^* &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} m \\ c_2^* &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} m \\ i^* &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} m \end{cases}$$

Przykład

Badamy więc c_1^*, i^*, oraz c_2^* jako funkcje $\alpha \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} &= \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)' m = \frac{2m}{(1+\alpha)^2} > 0 \\
\frac{\partial c_2^*}{\partial \alpha} &= \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m}\right)' = \frac{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m\right)'}{2\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} m}} = -\frac{\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2}}{2\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} \sqrt{m} < 0 \\
\frac{\partial i^*}{\partial \alpha} &= \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)' m = -\frac{2\alpha}{1+\alpha} m < 0.
\end{aligned}$$

Zatem wraz ze wzrostem elastyczności względem bieżących dochodów:

- rośnie bieżąca konsumpcja,
- maleje inwestycja,
- maleje również przyszła konsumpcja.