Ekonometria 0

1. Niech zmienne losowe X i Y spełniają równanie

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X,$$

gdzie β_0 i β_1 są stałymi rzeczywistymi. Załóżmy, że $\mathbb{E}[X] = \mu$ oraz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ są skończone. Wyznacz $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$ i $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

2. Załóżmy, że $\mathbb{E}[X] = \mu_X$, $\mathbb{E}[Y] = \mu_Y$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 > 0$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y) = \gamma$. Wyznacz β_0 i β_1 minimalizujące funkcję

$$\mathrm{MSE}(\beta_0, \beta_1) = \mathbb{E}\big[(Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2\big].$$

3. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych odpowiednio μ_1 i μ_2 oraz wariancjach σ_1^2 i σ_2^2.

   (a) Niech $Y = X_1 + X_2$ oraz $Z = X_1 - X_2$. Wyznacz $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

   (b) Niech $Y = 3X_1 + X_2$ oraz $Z = X_1 - 2X_2$. Wyznacz $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

4. Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi o tej samej skończonej wartości oczekiwanej μ i skończonych wariancjach. Wykaż, że estymatory

$$T_\alpha = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2, \qquad \alpha \in [0, 1],$$

są nieobciążonymi estymatorami parametru μ. Dla jakiej wartości $\alpha \in [0, 1]$ wariancja $\mathrm{Var}(T_\alpha)$ jest najmniejsza?

5. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu o wartości oczekiwanej μ. Wykaż, że estymator

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

jest nieobciążony dla każdej możliwej wartości μ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, przy czym α_i są ustalonymi stałymi rzeczywistymi.

6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu o wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2, gdzie $n \geq 2$. Wykaż, że następujące estymatory są nieobciążone:

   (a) $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ — estymator parametru μ;

   (b) $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ — estymator parametru σ^2.

7. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \theta]$, gdzie $\theta > 0$. Wyznacz estymator parametru θ metodą momentów.

8. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \theta]$, gdzie $\theta > 0$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ.

9. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu normalnego $N(\theta, 1)$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ. Porównaj go z estymatorem otrzymanym metodą momentów.

10. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\sigma^2 > 0$. Wyznacz estymatory największej wiarygodności parametrów μ i σ^2. Porównaj je z estymatorami otrzymanymi metodą momentów.

11. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą próbą losową z rozkładu wykładniczego o parametrze intensywności $\lambda > 0$, którego gęstość ma postać

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru λ. Porównaj go z estymatorem otrzymanym metodą momentów.