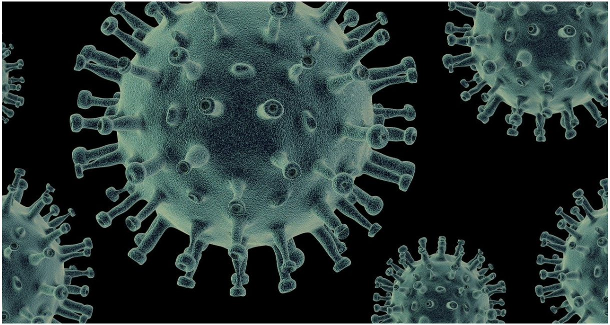
Mnożniki Lagrange'a i Twierdzenie Kuhna-Tuckera.

March 22, 2020



Niech $X \subset \prod_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}_+^n$ będzie zbiorem wypukłym. Niech $u : X \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności. Wprowadzamy zbiór ograniczneń postaci $\Gamma := \{x \in X : G(x) \leq 0\}$, gdzie $G : X \mapsto \mathbb{R}$. Rozważamy problem

$$\max u(x) \quad \text{przy ograniczeniach } G(x) \leq 0, x \in X,$$

czyli

$$\max_{x \in \Gamma} u(x).$$

Definicja

Mówimy, że x^* jest **rozwiązaniem optymalnym** dla problemu maksymalizacji funkcji $u(x)$ przy ograniczeniach $G(x) \geq 0$ jeśli

$$u(x^*) = \max_{x \in \Gamma} u(x) = \max_{\{x \in X : G(x) \geq 0\}} u(x).$$

Funkcja Lagrange'a

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = u(x) + \lambda G(x).$$

Definicja punktu siodłowego

Punkt (λ^*, x^*) jest punktem siodłowym $\mathcal{L}$ jeśli dla dowolnego $x \in X$ oraz $\lambda \geq 0$ zachodzi

$$\mathcal{L}(\lambda^*, x) \leq \mathcal{L}(\lambda^*, x^*) \leq \mathcal{L}(\lambda, x^*).$$

Ekstrema warunkowe, a punkt siodłowy -interpretacja

Problem został zatem rozszerzony i konsument nie musi przestrzegać ograniczeń:

- Ale pojawia się *mediator* (np. państwo, rękami swich urzędników), który zachęca konsumenta do przestrzegania ograniczeń;
- Parametr $\lambda \geq 0$ jest parametrem kary jaka jest proporcjonalnie nałożona na konsumenta jeśli nie będzie przestrzegał ograniczeń, oraz nagrody za jego przestrzeganie;
- Nałożenie kary/nagrody to jednak dodatkowy dochód/wydatek państwa, więc państwo nakłada λ uzwględniają również i swój interes;
- Punkt siodłowy (λ^*, x^*) to inaczej optymalny wymiar kary z punktu widzenia interesu państwa, x^* wiązka konsumpcyjna uwzględniająca nie tyle nakaz przestrzegania ograniczeń, co wymiar kary za jego nieprzestrzeganie;
- O dualizmie między ekstremami warunkowymi a punktami siodłowymi mówi *Twierdzenie Kuhna-Tuckera*.

Twierdzenie Kuhna-Tuckera

Jeśli (λ^*, x^*) jest punktem siodłowym $\mathcal{L}$ wtedy x^* jest rozwiązaniem optymalnym w problemie maksymalizacji funkcji $u(x)$ przy ograniczeniu $G(x) \geq 0$ tzn.

$$u(x^*) = \max_{x \in X : G(x) \geq 0} u(x).$$

Jeśli dodatkowo u i G są wklęsłe oraz istnieje $x_0 \in X$ takie, że $G(x_0) > 0$, wtedy dla każdego rozwiązania optymalnego x^*, istnieje $\lambda^* \geq 0$ taka, że (λ^*, x^*) jest punktem siodłowym $\mathcal{L}$.

Szkic dowodu

Pierwsza część jest prosta. Niech (x^*, λ^*) będzie punktem siodłowym $\mathcal{L}$ i niech $x \in \Gamma$ będzie dowolnym wektorem. Wtedy dla każdego $\lambda \geq 0$ i $x \in \Gamma = \{x : G(x) \geq 0\}$ zachodzi

$$u(x^*) = \mathcal{L}(0, x^*) \geq \mathcal{L}(\lambda^*, x^*)$$

$$\geq \mathcal{L}(\lambda^*, x) = u(x) + \lambda^* G(x) \geq u(x).$$

Stąd x^* jest rozwiązaniem optymalnym.

Szkic dowodu

W drugiej częśći dowodu założę dodatkowo, że u i G są różniczkowalne, a $X \subset \mathbb{R}^2$ oraz $G(x^*) = 0$ (x^* rozwiązanie optymalne). Zbiory

$$X_1 = \{x \in X : G(x) \geq 0\}$$

oraz

$$X_2 = \{x \in X : u(x) \geq u(x^*)\}$$

są wypukłe przecinające się w punkcie x^* i jest to ich jedyny wspólny punkt. Ponadto the pierwszy zbiór ma punkt wewnętrzny x_0. Również bez straty ogólności założymy, że X_2 ma punkt wewnętrzny.

Szkic dowodu

Oba zbiory przecinają wzdłuż wspólnej stycznej. Wektor prostopadły

- do krzywej o równaniu $u(x) = u(x^*)$ w punkcie $x = x^*$ to np.

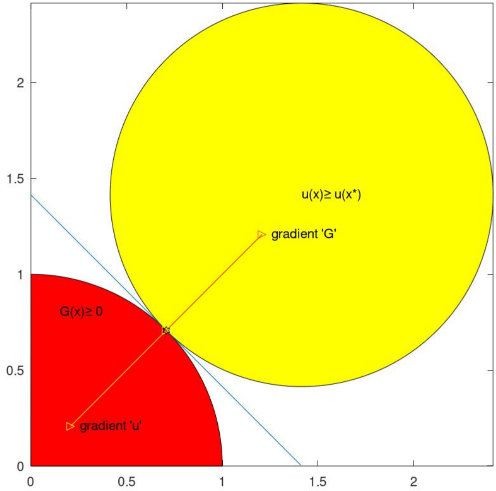
$$\vec{e}_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x^*), \frac{\partial u}{\partial y}(x^*)\right]$$

- do krzywej o równaniu $G(x) = G(x^*)$ w punkcie $x = x^*$ to np.

$$\vec{e}_2 = \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x^*), \frac{\partial G}{\partial y}(x^*)\right].$$

Ponieważ $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ są prostopadłe do wspólnej stycznej, stąd są współliniowe, a także przeciwstawne stąd istnieje $\lambda^* \in \mathbb{R}_+$ taka, że $\vec{e}_1 = -\lambda^* \vec{e}_2$.

Interpretacja twierdzenia Kuhna-Tuckera



Szkic dowodu C.D.

Stąd dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \lambda^* \frac{\partial G}{\partial x_i}(x^*) = 0.$$

oraz z wklęsłości u i G wynika, że dla tego λ^* i wszystkich $x \in X$ zachodzi

$$\mathcal{L}(\lambda^*, x^*) = u(x^*) + \lambda^* G(x^*) \geq u(x) + \lambda^* G(x) = \mathcal{L}(x, \lambda^*).$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych $\lambda \geq 0$ zachodzi

$$\mathcal{L}(\lambda^*, x^*) = u(x^*) + \lambda^* G(x^*) \leq u(x^*) + \lambda G(x^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda).$$

bo $G(x^*) = 0$. Stąd (λ^*, x^*) jest punktem siodłowym.

Wniosek

Gdy funkcje u i G są wklęsłe, każdy punkt $x^* \in X$ dla którego istnieje $\lambda^* \geq 0$ dla którego jest spełniony warunek

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda^* \frac{\partial G}{\partial x_i}, \text{ oraz } G(x^*) = 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są jest rozwiązaniem optymalnym w problemie maksymalizacji funkcji u na całym zbiorze $\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq 0\}$.

Uzasadnienie

Z warunku koniecznego (oznaczmy $Grad(\cdot) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T$)

$$Grad(u) + \lambda^* Grad(G), \text{ oraz } G(x^*) = 0.$$

Uzasadnienie-C.D.

Z wklęsłości u i G, a także z $\lambda^* > 0$ wynika, że dla $x \in X$

$$\mathcal{L}(\lambda^*, x^*) \geq \mathcal{L}(\lambda^*, x)$$

oraz z $G(x^*) = 0$ mamy

$$\mathcal{L}(\lambda^*, x^*) \leq \mathcal{L}(\lambda, x^*),$$

stąd (λ^*, x^*) jest punktem siodłowym $\mathcal{L}$ i z Twierdzenia Kuhna-Tuckera x^* jest rozwiązaniem optymalnym.

Wnioski z Twierdzenia Kuhna-Tuckera

Rozwiązanie optymalne x^* jest na brzegu zbioru rozwiązań dopuszczalnych tzn. $G(x^*) = 0$, chyba że x^* jest wartością największą u. Dokładniej

Uwaga

Gdy funkcje u i G są wklęsłe, każde rozwiązanie optymalne $x^* \in X$ spełnia warunek

$$(G(x^*) > 0) \Rightarrow (u(x^*) \geq u(x), \text{ dla wszystkich } x \in X) .$$

Innymi słowy, rozwiązanie optymalne x^* spełnia równanie:

$$u(x^*) = \max_{G(x) \geq 0} u(x) = \max_{G(x)=0} u(x),$$

o ile x^* nie jest wartością największą na całej dziedzinie X.

Warunki Kuhna-Tuckera

Niech funkcje u i G będą wklęsłe i różniczkowalne. Załóżmy, że istnieje $\lambda \geq 0$ takie, że dla $x^* \in X$

$$\forall_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}(x^*), \quad \text{oraz} \quad G(x^*) = 0.$$

Wtedy x^* jest rozwiązaniem optymalnych.

Przykład

Przykład

Znajdź największą wartość funkcji $u(x, y) = x + y$ na kole spełniającym warunek $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rozwiązanie

Problem sprowadza się do maksymalizacji $u(x, y) = x + y$ na zbiorze $\{(x, y) : G(x, y) \geq 0\}$, gdzie $G(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Zatem

$$\mathcal{L}(x, y) = x + y + \lambda(1 - x^2 - y^2).$$

Warunki konieczne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, G(x, y) = 0,$$

Przykład

Rozwiązanie C.D.

to

$$1 - 2x\lambda = 1 - 2y\lambda = 0 \quad \text{oraz } x^2 + y^2 = 1.$$

Mamy więc

$$(\lambda, x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ lub } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Z dodatnią $\lambda^* = \sqrt{2}2$ związane jest rozwiązanie $(x^*, y^*) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ponieważ u i G są wklęsłe, z twierdzenia Kuhna-Tuckera $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ jest rozwiązaniem optymalnym.

Twierdzenie Kuhna-Tuckera

- jest prawdziwe również w problemie maksymalizacyjnym $u(x)$ i wielu ograniczeniach $G_1(x) \geq 0$, $G_2(x) \geq 0$, ..., $G_k(x) \geq 0$, $k < n$;
- funkcja Lagrange'a spełnia równanie

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_k G_k(x_1, \ldots, x_k).$$

- dualizm między rozwiązaniem optymalnym a punktem siodłowym zachodzi gdy istnieje j oraz $x_0 \in X$ takie że $G_j(x_0) > 0$.

Mamy więc ogólniejsze warunki.

Warunki Kuhna-Tuckera

Jeśli u oraz $G_1, \ldots, G_k$ są wklęsłe oraz dla nieujemnych $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_k^*$ rozwiązanie x^* spełnia warunek

$$\forall_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad \text{oraz} \quad \forall_{j=1,\ldots,k} G_j(x^*) = 0,$$

to x^* jest rozwiązaniem optymalnym.