Gry wieloosobowe

11 grudnia 2024

Wieloosobowa gra ogólnie-powtórka

Grę wieloososobową można zdefiniowana jako

$$(\{1, 2, ..., n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n)),$$

gdzie:

- $\{1, 2, ..., n\}$ jest zbiorem graczy;
- X_i jest niepustym zbiorem **gracza i**;
- $w_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza i**;

Uwaga

Grę wieloosobową dwuosobową można zinterpretować jako następującą sytuację:

- Każdy **gracz i** niezależnie od pozostałych wybiera $x_i \in X_i$;
- Każdy **gracz i** otrzymuje wypłatę $w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$;

Definicja

Równowagą Nasha w grze wieloosobowej

$$(\{1, 2, ..., n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n))$$

nazywamy profil strategii $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ taki, że dla każdego gracza i

$$w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

$$\geq w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

dla wszystkich $x_i \in X_i$.

Równowaga Nasha-powtórka

Uwaga

Innymi słowy:

- Żaden z graczy nie zyska wybierającą alternatywę dla równowagi, jeśli pozostali gracze konsekwentnie zastosują strategię odpowiadającą równowadze Nasha;
- Można powiedzieć, że każdy z graczy stosuje strategię równowagi Nasha, bo ... wszyscy tak robią, np. zanieczyszczają środowisko, bo wszyscy tak robią;
- Z drugiej strony każdy z graczy naprawia własne szkody, bo pozostali też tak robią i nie chcą być napiętnowani;

Równowaga Nasha-powtórka

Uwaga

Może się zdarzyć, że odstępsto od równowagi na rzecz alternatywy przyniesie zysk graczowi i, ale pod warunkiem, że któryś z przeciwników, np. j również wybierze alternatywę x_j dla równowagi:

$$w_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots x_j^*, \ldots, x_n^*) <$$

$$< w_i(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_n^*).$$

Zatem o ile jednostronne odstępstwo od równowagi jest nieopłacalne, dwu, lub wieloosobowe ostępstwo od równowagi może przynieść zysk.

Równowaga Nasha

Oznaczenie

Dla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ zdefiniujmy

$$x_{-i} := \begin{cases} (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 1, \\ (x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 3, \ldots, n-2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n) & \text{dla} \quad i = n-1, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \text{dla} \quad i = n, \end{cases}$$

Analogicznie definujemy X_{-i}. Zdefiniujmy również:

$$(x_{-i}, x_i') := \begin{cases} (x_1', x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 1, \\ (x_1, x_2', x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 3, \ldots, n-2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}', x_n) & \text{dla} \quad i = n-1, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n') & \text{dla} \quad i = n. \end{cases}$$

Równowaga Nasha

Definicja

W grze n osobowej o wypłatach dla gracza i postaci

$$w_i : X_1 \times \ldots X_n \mapsto \mathbb{R},$$

funkcją najlepszych odpowiedzi dla gracza i na profil pozostałych graczy $x_{-i} \in X_{-i}$ nazywamy $BR_i : X_{-i} \mapsto 2^{X_i}$ jako

$$BR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i' \in X_i} w_i(x_{-i}, x_i')$$

Uwaga

Profil $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ jest równowagą Nasha wtedy i tylko wtedy gdy

$$x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*)$$

dla wszystkich $i = 1, 2, ..., n$.

Przykład. (Brak istnienia równowagi Nasha)

Studenci grają w następującą grę:

- Wypisują niezależnie na kartce liczbę naturalną;
- Wygrywa ten student, który wypisze większą liczbę;
- Przegrany płaci zwycięzcy 1 zł., a w przypadku remisu nie dochodzi do płatności.

Równowaga Nasha nie istnieje.

Przykład. (Brak istnienia równowagi Nasha) C.D.

Jest to gra o sumie zerowej, gdzie:

- Zbiór strategii dla obu studentów to $X_1 = X_2 := \mathbb{N}$;
- Funkcje wypłat dla studentów:

$$w_1(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad x_1 > x_2 \\ 0 & \text{jeśli} \quad x_1 = x_2 \\ -1 & \text{jeśli} \quad x_1 < x_2, \end{cases}$$

oraz

$$w_2(x_1, x_2) := \begin{cases} -1 & \text{jeśli} \quad x_1 > x_2 \\ 0 & \text{jeśli} \quad x_1 = x_2 \\ 1 & \text{jeśli} \quad x_1 < x_2. \end{cases}$$

Przykład. (Brak istnienia równowagi Nasha) C.D.

Jednak

- Funkcje najlepszych odpowiedzi to
$$BR_1(x_2) = \{x_2 + 1, x_2 + 2, ...\}$$
oraz
$$BR_2(x_1) = \{x_1 + 1, x_1 + 2, ...\};$$
- Więc nie może istnieć para strategii (x_1^*, x_2^*) taka, że $(x_1^*, x_2^*) \in BR_1(x_2^*) \times BR_2(x_1^*)$;
- Równowaga Nasha zatem nie istnieje;
- A kiedy równowaga Nasha istnieje, odpowiedź w dalszej części.

Oznaczenie

Niech X będzie zbiorem. Oznaczmy

$$2^X := \{A : A \subset X\}.$$

Definicja

Niech X i Y będą zbiorami niepustymi. Odwzorowanie $\Gamma : X \mapsto 2^Y$ nazywamy **multifunkcją** jeśli $\Gamma(x) \neq \emptyset$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja

Grafem, lub **wykresem** multifuncji $\Gamma : X \mapsto 2^Y$ nazywamy

$$\{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}.$$

Definicja

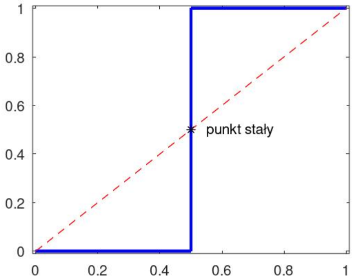
Punktem stałym multifunkcji $\Gamma : X \mapsto 2^X$ nazywamy element $x_0 \in X$ taki, że $x_0 \in \Gamma(x_0)$.

Twierdzenie Kakutaniego o punkcie stałym

Niech X będzie **wypukłym** i **zwartym** podzbiorem $\mathbb{R}^N$, oraz niech $\Gamma : X \mapsto 2^X$ będzie multifunkcją taką, że:

- Dla wszystkich $x \in X$, $\Gamma(x)$ jest zbiorem **wypukłym**;
- Wykres multifuncji Γ jest **zbiorem domkniętym**.

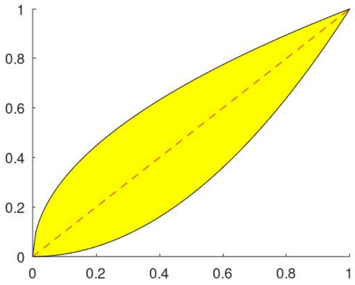
Wtedy istnieje punkt stały multifunkcji Γ. Zbiór punktów stałych multifunkcji Γ jest zbiorem zwartym.



Rysunek: Punkt stały multifunkcji spełniającej tw. Kakutaniego

Wzór multifunkcji z rysunku 1, która ma jeden punkt stały $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

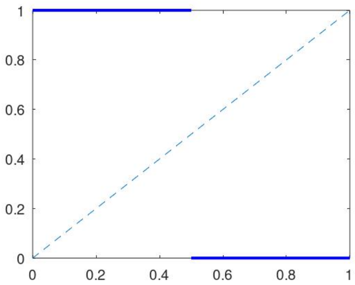
$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{jeśli} \quad x \in [0, 0.5), \\ [0,1] & \text{jeśli} \quad x = 0.5, \\ \{1\} & \text{jeśli} \quad x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$



Rysunek: Punkty stałe multifunkcji spełniającej tw. Kakutaniego.

Wzór multifunkcji z rysunku 2, która ma punkty na prostej o równaniu $y = x$ dla $X = [0, 1]$:

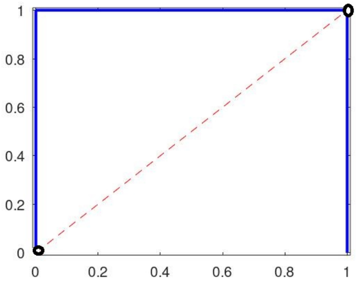
$$\Gamma(x) = [x^2, \sqrt{x}].$$



Rysunek: $\Gamma(1/2) = \{0, 1\}$ nie jest zbiorem wypukłym, więc nie spełnia tw. Kakutaniego.

Wzór multifunkcji z rysunku 3, która nie ma punktu stałego:

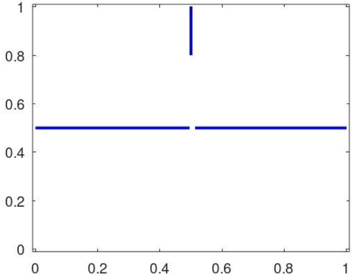
$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{jeśli} \quad x \in [0, 0.5) \\ \{0, 1\} & \text{jeśli} \quad x = 0.5, \\ \{0\} & \text{jeśli} \quad x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$



Rysunek: $\Gamma(0) = (0, 1]$ i $\Gamma(1) = [0, 1)$ nie są zbiorami zwartymi, więc nie jest spełne założenie tw. Kakutaniego.

Wzór multifunkcji z rysunku 4, która nie ma punktów stałych:

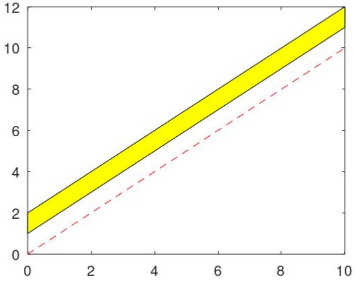
$$\Gamma(x) = \begin{cases} (0,1] & \text{jeśli} \quad x = 0, \\ \{1\} & \text{jeśli} \quad x \in (0,1), \\ [0,1) & \text{jeśli} \quad x = 1. \end{cases}$$



Rysunek: Wykres nie jest zbiorem domkniętym, więc nie jest spełnione tw. Kakutaniego.

Wzór multifunkcji z rysunku 5, która nie ma punktów stałych:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2}\right\} & \text{jeśli} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ [0.8, 1] & \text{jeśli} \quad x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Rysunek: $\Gamma(x) = [x+1, x+2]$ jest zbiorem wypukłym i zwartym, a wykres jest domknięty. Tym razem $X = [0, \infty)$ nie jest zbiorem zwartym, więc Tw. Kakutaniego nie jest spełnione.

Wzór multifunkcji z rysunku 6, która nie ma punktów stałych dla $x > 0$:

$$\Gamma(x) = [x+1, x+2].$$

Definicja

Punktem stałym funkcji $f : X \mapsto X$ nazywamy element $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = x_0$.

Twierdzenie Browera-Schaudera-Tikhonoffa o punkcie stałym

Niech X będzie **wypukłym** i **zwartym** podzbiorem $\mathbb{R}^N$, oraz niech $f : X \mapsto X$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje punkt stały funkcji f. Zbiór punktów stałych funkcji f jest zbiorem zwartym.

Dowód

Jest to wniosek z twierdzenia Kakutaniego: Niech $\Gamma(x) = \{f(x)\}$:

- $\Gamma(x)$ jest jest zbiorem jednopunktowym, a więc wypukłym i zwartym;
- Ponieważ f jest ciągła, ma wykres domknięty, więc Γ także;

Zatem z Twierdzenia Kakutaniego istnieje $x_0 \in \Gamma(x_0) = \{f(x_0)\}$, czyli $f(x_0) = x_0$.

Przykład. Funkcja ciągła na zbiorze zwartym bez punktu stałego.

Niech X będzie okręgiem o równaniu

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Nie jest to zbiór wypukły, ale jest zwarty Niech $f : X \mapsto X$ oznacza obrót wokół $(0, 0)$ o kąt $\varphi \in]0, 2\pi[$

$$f(x, y) = (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)) .$$

Chociaż f jest ciągła, nie ma punktu stałego.

Twierdzenie Nasha o istnieniu równowagi Nasha

W grze n-osobowej, niech $X_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$,$X_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$,..., $X_n \subset \mathbb{R}^{N_n}$ będą **zwartymi** i **wypukłymi** zbiorami strategii. Niech $w_i(\cdot)$ będą funkcjami wypłat takimi, że

- Dla każdego gracza i, funkcja $x_i \in X_i \mapsto w_i(x_{-i}, x_i)$ jest **wypukła**;
- Dla każdego gracza i, funkcja $w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest **ciągła**.

Wtedy istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha i zbiór równowag Nasha jest zbiorem zwartym w $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Dowód

- Profil $(x_1^*, ..., x_n^*)$ jest równowagą Nasha wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_{i=1,2,...,n} x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*).$$
- Dla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ niech
$$\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = BR_1(x_{-1}) \times BR_2(x_{-2}) \times \ldots \times BR_n(x_{-n}).$$
- Zatem równowaga Nasha to jednocześnie punkt stały multifunkcji Γ;
- Wykażemy, że Γ spełnia założenia Twierdzenia Kakutaniego.

Dowód C.D.

Przypomnijmy,

$$BR_i(x_i) = \arg\max_{x_i \in X_i} w_i(x_{-i}, x_i).$$

- Funkcja $w_i(x_{-i}, \cdot)$ jest wklęsła, zatem $BR_i(x_{-i})$ jest **zbiorem wypukłym**;
- Funkcja $w_i(x_{-i}, \cdot)$ jest **ciągła**, zatem $BR_i(x_{-i})$ jest **zbiorem domkniętym**, a że $BR_i(x_{-i}) \subset X_i$, oraz X_i jest **zwartym** podzbiorem $\mathbb{R}^{N_i}$, $BR_i(x_{-i})$ jest zbiorem **zwartym**;
- Zatem $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = BR_1(x_{-1}) \times \ldots \times BR_n(x_{-n})$ jest zbiorem **zwartym i wypukłym** dla wszystkich $(x_1, x_2, ..., x_n)$;
- Wykażę,że Γ ma wykres domknięty.

Dowód C.D.

Aby wykazać domkniętość wykresu,

- Wybierzmy ciąg $\left((x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k), (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k)\right)_{k=1}^{\infty}$ elementów należących do $Gr(\Gamma)$, czyli niech
$$(y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k) \in \Gamma(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \text{ dla } k \in \mathbb{N};$$
- Załóżmy, że $(x_1^k, ..., x_n^k) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1^k, ..., y_n^k) \to (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ gdy $k \to \infty$.
- Pokażemy, że $((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in Gr(\Gamma)$.

Dowód C.D.

- Ponieważ $((x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k), (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k)) \in Gr(\Gamma)$ dla wszystkich k, mamy $y_i^k \in BR_i(x_{-i}^k)$, lub równoważnie
$$w_i(x_{-i}^k, y_i^k) \geq w_i(x_{-i}^k, y_i')$$
dla wszystkich $y_i' \in X_i$ oraz k i i;
- Przechodząc do granicy $k \to \infty$ i korzystając z ciągłości u_i mamy
$$w_i(x_{-i}, y_i) \geq w_i(x_{-i}, y_i'),$$
co oznacza $y_i \in BR_i(x_{-i})$;

Dowód C.D.

- Ponieważ i jest dowolne,

  $$(y_1, y_2, ..., y_n) \in BR_1(x_{-1}) \times \ldots \times BR_n(x_{-n}) = \Gamma(x_1, x_2, ..., x_n),$$

  czyli $((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) \in Gr(\Gamma)$, zatem $Gr(\Gamma)$ jest domknięty;
- Zatem $\Gamma(x)$ jest zbiorem wypukłym i zwartym, oraz $Gr(\Gamma)$ jest domknięty, stąd i z Twierdzenia Kakutaniego istnieje punkt stały $(x_1^*, ..., x_n^*)$, czyli spełniający $(x_1^*, ..., x_n^*) \in \Gamma(x_1^*, ..., x_n^*)$;
- Z definicji Γ, $x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*)$ dla wszystkich i, czyli jest to równowaga Nasha.

Istnienie równowagi Nasha-podstawy teoretyczne

Dowód C.D.

- Pozostaje wykazać, że zbiór równowag Nasha, lub równoważnie punktów stałych Γ jest zbiorem zwartym w $X \times X$ gdzie $X := X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$;
- Jeśli $x := (x_1, x_2, ..., x_n)$ jest punktem stałym Γ, to $x \in \Gamma(x)$, zatem
$$(x, x) \in Gr(\Gamma);$$
- Niech teraz $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem punktów stałych Γ i niech $x^k \to x$ gdy $k \to \infty$;
- Wtedy dla k
$$(x^k, x^k) \in Gr(\Gamma),$$
a ponieważ $Gr(\Gamma)$ jest domkniętym zbiorem, $(x, x) \in Gr(\Gamma)$, czyli $x \in \Gamma(x)$;
- Zatem zbiór punktów stałych jest domkniętym podzbiorem zwartego zbioru $X \times X$, a więc również jest zbiorem zwartym.

Gra rozszerzona

Oznaczenia

- Jeśli $(\Omega, \mathcal{F})$ jest przestrzenią borelowską, to $\Delta(X)$ oznacza zbiór rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze Borelowskim $X \subset \Omega$;
- Każdy $x \in X$ jest identyfikowany z rozkładem zdegenerowanym $\delta_x(\cdot) \in \Delta(X)$, takim, że $\delta_x(\{x\}) = 1$;
- Rozkład zmiennej losowej wybierającej $x_1, x_2, ..., x_k$ z prawdopodobieństwami po kolei $p_1, p_2, ..., p_k$ oznaczymy jako

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \delta_{x_i}(\cdot) = p_1 \delta_{x_1}(\cdot) + p_2 \delta_{x_2}(\cdot) + \ldots + p_n \delta_{x_n}(\cdot).$$

Twierdzenie o nośniku (ogólne sformułowanie)

Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią borelowską i niech $X \subset \Omega$ będzie pewnym zbiorem borelowskim. Niech $f : X \mapsto \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją ograniczoną i borelowską, oraz niech $\tilde{f}$ będzie jej rozszerzeniem na $\Delta(X)$, czyli

$$\tilde{f}(\mu) := \int_X f(x)\mu(dx).$$

Wtedy $\mu^* \in \arg \max\limits_{\mu \in \Delta(X)} \tilde{f}(\mu)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mu^* \left(\arg\max_{x \in X} f(x) \right) = 1.$$

Innymi słowy

Szukając maksimum $\tilde{f}(\mu)$ na $\mu \in \Delta(X)$ wystarczy znaleźć jakikolwiek zbiór punktów maksymalizujących $f(x)$ i dowolny rozkład na tych punktach. Nie ma innych rozkładów maksymalizujących $\tilde{f}(\mu)$ na $\mu \in \Delta(X)$.

Gra rozszerzona

W grze n-osobowej, niech $X_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$,$X_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$,..., $X_n \subset \mathbb{R}^{N_n}$ zbiorami strategii i niech $w_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją wypłat. **Grą rozszerzoną** nazywamy grę

$$(\{1, 2, \dots, n\}, \Delta(X_1) \times \Delta(X_2) \times \dots \times \Delta(X_n)), (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n)),$$

gdzie

- Dla każdego i, zbiory strategii $\Delta(X_i)$ oznaczają zbiory rozkładów prawdopodobieństwa na X_i;
- Funkcje wypłat oznaczają oczekiwane wypłaty gdy gracze niezależnie od siebie wybierają $\mu_i \in \Delta(X_i)$:

$$\tilde{w}_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) :=$$

$$\int_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} w_i(x_1, x_2, \dots, x_n)(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n)(dx_1 \times dx_2 \times \dots \times dx_n)$$

$$:= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \left(\dots \left(\int_{X_n} w_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\mu_n(dx_n) \right) \dots \right) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1).$$

Uwaga

Gra rozszerzona polega na rozszerzeniu zbioru strategii $x_i \in X_i$ na zbiór strategii zrandomizowanych. Gracz nie musi bezpośrednio wybierać $x_i \in X_i$, gdyż może wybrać losowo zbiór strategii wg wybranego przez siebie rozkładu μ_i.

Nazewnictwo

Strategie czyste i mieszane definiujemy analogicznie jak w grach dwumacierzowych.

- Gdy gracz i wybierze $x_i \in X_i$ (wybiera $\delta_{x_i}(\cdot)$), to taka strategia nazywana jest **strategią czystą**;
- Strategia dla gracza i polegająca na wyborze niezdegenerowanego rozkładu $\mu_i \in \Delta(X_i)$ nazywamy **strategią zrandomizowaną**;
- Strategię czystą lub zrandomizowaną nazwiemy ogólnie **strategią mieszaną**;

Strategię czystą $x_i \in X_i$ utożsamiamy ze strategią mieszaną $\delta_{x_i} \in \Delta(X_i)$, czyli ze zdegenerowaną miarą probabilistyczną, która spełnia $\delta_{x_i}(\{x_i\}) = 1$, zatem będziemy oznaczać:

$$\tilde{w}_i(\mu_{-i}, x_i) := \tilde{w}_i(\mu_{-i}, \delta_{x_i}).$$

Twierdzenie Nasha o równowadze w zbiorze strategii mieszanych

W grze n-osobowej, niech $X_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$,$X_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$,..., $X_n \subset \mathbb{R}^{N_n}$ będą **zwartymi** (**niekoniecznie wypukłymi** zbiorami strategii. Niech $w_i(\cdot)$ będą funkcjami wypłat takimi, że dla każdego gracza i, funkcja $w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest **ciągła** (funkcje $x_i \mapsto w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ niekoniecznie są wypukłe). Wtedy istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha w zbiorze strategii mieszanych $\Delta(X_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ i zbiór równowag Nasha jest zbiorem zwartym w $\Delta(X_1) \times \Delta(X_2) \times \ldots \times \Delta(X_n)$.

Twierdzenie

Każda gra dwumacierzowa posiada równowagę Nasha w zbiorze strategii mieszanych.

Wnioski z Twierdzenia Nasha

Dowód

Niech $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ będą macierzami wypłat dla obu graczy. Wtedy zbiory strategii dla obu graczy spełniają odpowiednio

$$X_1 = \underbrace{\{1, 2, ..., m\}}_{\text{nr wiersza}} \quad \text{oraz} \quad X_2 = \underbrace{\{1, 2, ..., n\}}_{\text{nr kolumny}},$$

czyli są to zbiory zwarte, a wypłaty

$$w_1(i,j) = a_{ij}, \quad w_2(i,j) = b_{ij},$$

czyli są to funkcje ciągłe (na zbiorze dyskretnym, w szczególności skończonym, każda funkcja jest ciągła). Zatem z Tw. Nasha wynika, że istnieje równowaga w zbiorze strategii mieszanych.

Podsumowanie Twierdzenia Nasha

Z twierdzenia Nasha wnioskujemy, że:

- Gdy zbiory strategii są zwarte i wypukłe są, a funkcje wypłat $w_i(x_1, ..., x_n)$ są ciągłe w produkcie i wypukłe w x_i, to istnieje równowaga Nasha (w strategiach czystych);
- Gdy zrezygnujemy z założenia, że zbiory strategii są wypukłe, lub z wklęsłości $w_i(x_1, ..., x_n)$ względem x_i, równowaga Nasha w strategiach czystych może nie istnieć, ale będzie istnieć w zbiorze strategii zrandomizowanych;
- Każda gra dwumacierzowa, a więc i macierzowa posiada równowagę Nasha w zbiorze strategii mieszanych.

Przykład. Estymacja średniokwadratowa.

Rozpatrzmy dwuosobową grę o zbiorach strategii postaci $X_1 = X_2 = [0, 1]$, oraz wypłatach postaci:

$$w_1(x, y) = (x - y)^2, \quad w_2(x, y) = -(x - y)^2.$$

Zatem:

1. Obie funkcje są ciągłe, ale w_1 nie jest wklęsła, więc Twierdzenie Kakutaniego nie działa w odniesieniu do strategii czystych, ale działa dla strategii mieszanych;
2. I rzeczywiście wykażemy, że nie istnieje równowaga Nasha w zbiorze strategii czystych, ale można podać przykład równowagi w zbiorze strategii mieszanych.

Przykład. Estymacja średniokwadratowa.

Funkcje najlepszych odpowiedzi spełniają odpowiednio

$$BR_{\mathbf{1}}(y) = \begin{cases} \{1\} & \text{jeśli} \quad y < 1/2, \\ \{0,1\} & \text{jeśli} \quad y = \frac{1}{2}, \\ \{0\} & \text{jeśli} \quad y > 1/2, \end{cases}$$

oraz

$$BR_{\mathbf{2}}(x) = \{x\}\ .$$

Gra nie ma czystej równowagi Nasha (x^*, y^*) ponieważ gdyby istniała to:

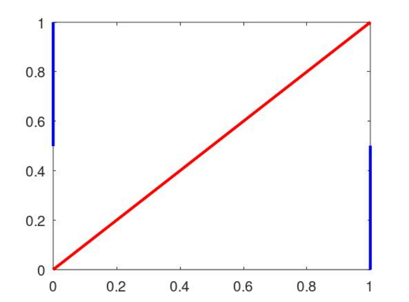
1. Jeśli $y^* \in [0, 1/2)$, to wtedy $x^* \in BR_{\mathbf{1}}(y^*)$, czyli $x^* = 1$, ale wtedy $x^* \neq y^*$, zatem $y^* \notin BR_{\mathbf{2}}(x^*)$;
2. jeśli $y^* = 1/2$, to wtedy $x^* \in BR_{\mathbf{1}}(y^*)$, czyli $x^* \in \{0, 1\}$, ale wtedy $y^* \neq x^*$, zatem również $y^* \notin BR_{\mathbf{2}}(x^*)$;
3. Jeśli $y^* \in (1/2, 1]$, to wtedy $x^* \in BR_{\mathbf{1}}(y^*)$, czyli $x^* = 0$, ale wtedy $y^* \neq x^*$, czyli również $y^* \notin BR_{\mathbf{2}}(x^*)$;

W żadnym wypadku (x^*, y^*) nie jest równowagą Nasha. Równowaga Nasha istnieje w zbiorze strategii

mieszanych

Przykłady

Przykład. Estymacja średniokwadratowa.



Rysunek: Wykresy funkcji najlepszych odpowiedzi nie przecinają się w układzie $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Przykłady

Przykład. Estymacja średniokwadratowa.

Można wykazać, że jedną z równowag w grze rozszerzonej jest (μ^*, ν^*) postaci:

$$\mu^*(\cdot) := \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{0}}(\cdot) + \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{1}}(\cdot), \quad \text{oraz} \quad \nu^*(\cdot) = \delta_{\mathbf{1}/\mathbf{2}}(\cdot)$$

czyli μ^* to wybór 0 z prawdopodobieństwem 1/2 i 1 z takim samym prawdopodobieństwem, natomiast ν^* to wybór 1/2 z prawdopodobieństwem 1. (μ^*, ν^*) jest równowagą Nasha bowiem,

- Jeśli gracz 2 zastosuje ν^* to oczekiwana wypłata dla gracza 1 wyniesie

$$\tilde{w}(x, \nu^*) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

  zatem $\{0, 1\} \subset BR_1(\nu^*)$, zatem z twierdzenia o nośniku $\mu^* \in BR_1(\nu^*)$;
- Jeśli gracz 2 zastosuje μ^* to oczekiwana wypłata dla gracza 2 wyniesie

$$\tilde{w}(\mu^*, y) = -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2,$$

  gdzie jedyne optymalne rozwiązanie to $\frac{1}{2}$, czyli $\nu^*(\cdot) = \delta_{1/2}(\cdot) \in BR_2(\mu^*)$.

Zatem (μ^*, ν^*) jest zrandomizowaną równowagą Nasha.

Przykłady.

Notacja

$(x_1, ..., x_n) = (c_{-i}, d)$ oznaacza, że $x_i = d$, oraz $x_j = c$ gdy $j \neq i$.

Przykłady.

Przykład. Aukcja Vickreya.

W aukcji bierze udział n osób, które anonimowo składają ofertę zakupu pewnego obrazu o wartości $c > 0$. Wygrywa ten kto złoży najwyższą cenę, ale zapłaci tyle ile zaproponuje druga w kolejności osoba. W przypadku remisu, o zwycięztwie decyduje losowanie z równym prawdopodobieństwem.

- Znajdź równowagi Nasha.
- Czy istnieją równowagi, które dają zysk aukcjonariuszowi?
- Czy zrandomizowana strategia $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ zdefiniowana jako
$$\mu_i = \frac{1}{2}\delta_0(\cdot) + \frac{1}{2}\delta_c(\cdot)\forall_i$$
jest równowagą Nasha w zbiorze strategii mieszanych? Pokazać, że wszystkim graczom daje dodatnie oczekiwane wygrane.

Przykład. Aukcja Vickreya. Ilustracja.

Przykładowo 6 aukcjonariuszy(ek) złożyło oferty kupna obrazu.

Inwestor	*Oferta*	Lista rankingowa
Ania	10.000	3
Bronek	8.000	5
Czesiu	11.000	2
Daria	9.500	4
Ewa	12.000	1
Franek	7.000	6

Zatem Ewa proponując 12.000 wygrywa licytację i ma prawo do zakupu obrazu za 11.000, czyli za cenę zaproponowaną przez drugiego inwestora Czesia.

Przykład. Aukcja Vickreya. Ilustracja.

Inne wyniki.

Inwestor	*Oferta*	Lista rankingowa
Ania	11.000	$1, 2, 3$
Bronek	10.000	4
Czesiu	11.000	$1, 2, 3$
Daria	9.500	5
Ewa	9.000	6
Franek	11.000	$1, 2, 3$

Tym razem najwyżej licytują Ania, Czesiu i Franek i między nimi rozegra się dogrywka. Zwycięzca dogrywki kupuje obraz za 11.000.

Przykład. Aukcja Vickreya. Rozwiązanie.

Oznaczmy:

- $x^1 := \max(x_1, x_2, ..., x_n)$;
- x^i- i ta największy element z liczb $(x_1, ..., x_n)$.

Funkcja wypłaty dla gracza i:

$$r_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{c - x^2}{\#N(x)} & \text{gdy} \quad x_i = x^1 \\ 0 & \text{gdy} \quad x_i < x^1, \end{cases}$$

gdzie

$$N(x) := \{i : x_i = x^1\},$$

a $\#(\cdot)$ oznacza moc danego zbioru.

Przykłady.

Przykład. Aukcja Vickreya.

- Łatwo wykazać, że $BR_i(c_{-i})$ spełnia

$$BR_i(c_{-i}) = \mathbb{R}_+,$$

1. $x_i < c$ oznacza przegraną licytację (wypłata 0);
2. $x_i = c$ dogrywka, ale nawet w przypadku zwycięstwa, i płaci c, tyle ile obraz jest wart (wypłata 0);;
3. $x_i > c$ oznacza, że i wygra licytację, ale zapłaci za obraz c, tyle ile wynosi jego wartość (wypłata 0);

- Łatwo wykazać, że $BR_j(c_{-i}, d)$ dla $j \neq i$ również spełnia

$$BR_j(c_{-i}, d) = [0, d),$$

gdy $d > c$, ponieważ jedyny gracz, który był gotowy przepłacić, i tak płaci c, co równoważy cenę obrazu.

Przykład. Aukcja Vickreya.

- Zatem $x = (c, c, ..., c)$ jest równowagą Nasha;
- Również $x = (c_{-i}, d)$ jest równowagą Nasha gdy $d > 0$:
  1. Poprzednio ustaliliśmy $BR_i(c_{-i}, d) = \mathbb{R}$, stąd $d \in BR_i(c_{-i})$;
  2. Dla $j \neq i$: jeśli pozostaje przy c, przegra licytację, a żeby wygrać musiałby wybrać $c' > d$, czyli tym bardziej straci, ponieważ wypłata wyniesie $c - c'$, zatem $c \in BR_j(c_{-i}, d)$ ponieważ
  $$BR_j(x_{-j}) = [0, d).$$

Przykłady.

Przykład. Aukcja Vickreya.

- Podobnie wykażemy, że gdy $x^1 = x^2 = c$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest równowaga Nasha;
- Jeszcze ogólniej, wystarczy gdy $x^1 \geq x^2 = c$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ponieważ każdy pojedynczy gracz, jeśli chce wygrać musi zaproponować cenę nie mniejszą niż x^1, a więc nawet jak wygra licytację, przepłaci za obraz;
- Gdy $x^1 > c$, ale $x^2 < c$, wtedy pierwszy gracz w przypadku zwycięstwa płaci $c - x^2 > 0$, a porażka powoduje, że traci zysk, zatem ta równowaga daje zwycięzcy zysk;
- Gdy $x^1 > x^2 > c$, wtedy zwycięzca aukcji traci, bo płaci więcej niż wynosi cena obrazu, zatem nie jest to równowaga Nasha;
- Gdy $x^1 < c$, wtedy każdy z przegranych może wybrać np. c i wtedy zapłaci x^1, a więc zyska $x^1 - c$;

Przykłady.

Przykład. Aukcja Vickreya.

1. Zbiór czystych równowag to
$$NE = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : x^1 \geq x^2 = c, \text{ lub } x^1 > c > x^2\},$$
czyli druga największa licytacja to wybór c;
2. Równowaga gdy $x^1 > c > x^2$ daje zwycięzcy zysk $c - x^2$;
3. Pozostacje pytanie o równowagi zrandomizowane.

Przykład. Aukcja Vickreya.

- Niech $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ będzie profilem, że wszyscy aukcjonariusze losują wybór między 0 i c z jednakowym prawdopodobieństwem: $\mu_i = \frac{1}{2}\delta_0(\cdot) + \frac{1}{2}\delta_c(\cdot)$, $i = 1, 2, ..., n$;
- Zatem zwycięzca i zarobi w dwóch okolicznościach:
  1. Wszyscy pozostali przeciwnicy wylosują 0, a on wylosuje c wtedy zyska obraz za darmo, bo zapłaci tyle co drugi na liście, czyli zysk wyniesie c;
  2. Wszyscy wylosują 0, a on wygra dogrywką i wtedy oczekiwany zysk wyniesie $\frac{1}{n}c$;

Przykłady.

Przykład. Aukcja Vickreya.

- Zatem jeśli i rozważy zmianę strategii, to pozostali gracze dadzą mu wygrać i jednocześnie zyskać tylko w przypadku gdy wszyscy wylosują 0, co nastąpi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^{n-1}}$, zarem oczekiwana wypłata to

$$w_i(\mu_{-i}, x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} c & dla \quad x_i > 0 \\ \frac{1}{n2^{n-1}} c & dla \quad x_i = 0 \end{cases}$$

- Stąd

$$BR_i(\mu_{-i}) = (0, \infty),$$

zatem nośnik $\mu_i = \frac{1}{2}\delta_0(\cdot) + \frac{1}{2}\delta_c(\cdot)$, który jest postaci $\{0, 1\}$ nie zawiera się w $BR_i(\mu_{-i}) = (0, c]$, zatem $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ nie jest równowagą Nasha;

- Ale daje wszystkim oczekiwaną dodatnią wygraną, bo:

$$w_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2^n} c > 0.$$