

Gry wieloosobowe

25 listopada 2024

Grę wieloosobową można zdefiniowana jako

$$(\{1, 2, \dots, n\}, X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, (w_1, w_2, \dots, w_n)),$$

gdzie:

- $\{1, 2, \dots, n\}$ jest zbiorem graczy;
- X_i jest niepustym zbiorem **gracza i**;
- $w_i : \prod_{i=1}^n X_i \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza i**;

Uwaga

Grę wieloosobową dwuosobową można zinterpretować jako następującą sytuację:

- Każdy **gracz** i niezależnie od pozostałych wybiera $x_i \in X_i$;
- Każdy **gracz** i otrzymuje wypłatę $w_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

Uwaga

Grę wieloosobową można opisać zwięźle, jako funkcja

$$F : \{1, 2, \dots, n\} \times \prod_{i=1}^n X_i \mapsto \mathbb{R},$$

gdzie $F(i, x_1, x_2, \dots, x_n) = w_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, czyli i -indeks gracza, a (x_1, x_2, \dots, x_n) oznacza wektor strategii poszczególnych graczy, a funkcja zwraca wypłatę odpowiedniego gracza.

Definicja

Równowagą Nasha w grze wieloosobowej

$$(\{1, 2, \dots, n\}, X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, (w_1, w_2, \dots, w_n))$$

nazywamy profil strategii $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ taki, że dla każdego gracza i

$$\begin{aligned} & w_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \\ & \geq w_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \end{aligned}$$

dla wszystkich $x_i \in X_i$.

Uwaga

Innymi słowy:

- Żaden z graczy nie zyska wybierając alternatywę dla równowagi, jeśli pozostali gracze konsekwentnie zastosują strategię odpowiadającą równowadze Nasha;
- Można powiedzieć, że każdy z graczy stosuje strategię równowagi Nasha, bo ... wszyscy tak robią, np. zanieczyszczają środowisko, bo wszyscy tak robią;
- Z drugiej strony każdy z graczy naprawia własne szkody, bo pozostali też tak robią i nie chcą być napiętnowani;

Uwaga

Może się zdarzyć, że odstępstwo od równowagi na rzecz alternatywy przyniesie zysk graczowi i , ale pod warunkiem, że któryś z przeciwników, np. j również wybierze alternatywę x_j dla równowagi:

$$\begin{aligned} w_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*) &< \\ &< w_i(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n^*). \end{aligned}$$

Zatem o ile jednostronne odstępstwo od równowagi jest nieopłacalne, dwu, lub wieloosobowe odstępstwo od równowagi może przynieść zysk.

Przykład

Mamy 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartość projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^3 , y^3 i z^3 ;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$w_1(x, y, z) = xyz - x^3,$$

$$w_2(x, y, z) = xyz - y^3,$$

$$w_3(x, y, z) = xyz - z^3,$$

Znajdź równowagi Nasha.

Rozwiązanie

Widać, że wszystkie funkcje wydat w_i są wklęsłe względem strategii x_i ; zatem gracz 1 powinien wybrać x dla którego

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = yz - 3x^2 = 0.$$

Analogicznie postąpią pozostali gracze, czyli rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x} = yz - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} = xz - 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial z} = xy - 3z^2 = 0 \end{cases}$$

Jedyna równowaga Nasha to $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$, zatem koszty wkładu przekraczają potencjalne zyski z projektu.

Przykład

Mamy 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartość projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^2 , y^2 i z^2 , czyli nauczył się efektywniej zarządzać kosztami;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$w_1(x, y, z) = xyz - x^2,$$

$$w_2(x, y, z) = xyz - y^2,$$

$$w_3(x, y, z) = xyz - z^2,$$

Znajdź równowagi Nasha.

Rozwiązanie

Widać, że wszystkie funkcje wypłat w_i są wklęsłe względem strategii x_i ; zatem rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x} = yz - 2x = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} = xz - 2y = 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial z} = xy - 2z = 0 \end{cases}$$

Jedynie równowagi Nasha to $(x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, 0, 0)$, czyli tzw. *równowaga biedy* oraz $(x_2^*, y_2^*, z_2^*) = (2, 2, 2)$ zatem jest możliwość, że gracze wezmą się do pracy, jednak bierności nie można wykluczyć. Wypłaty równowagowe to odpowiednio

$$w_1(0, 0, 0) = w_2(0, 0, 0) = w_3(0, 0, 0) = 0, \quad \text{oraz} \quad w_1(2, 2, 2) = w_2(2, 2, 2) = w_3(2, 2, 2) = 4,$$

czyli równowaga, gdy gracze solidarnie angażują się w projekt daje więcej niż bierność, która prowadzi do biedy.

Uwaga

Mamy te same 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartość projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^2 , y^2 i z^2 , czyli nauczył się efektywniej zarządzać kosztami;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}w_1(x, y, z) &= xyz - x^2, \\w_2(x, y, z) &= xyz - y^2, \\w_3(x, y, z) &= xyz - z^2,\end{aligned}$$

Można wykazać, że nawet równowaga $(2,2,2)$ nie daje satysfakcji graczom.

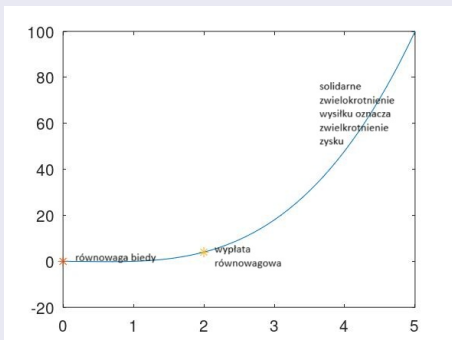
Uwaga C.D.

Założmy, że wysiłek graczy będzie ten sam, tzn. $x = y = z$, ale niekoniecznie będzie równowagowy, tzn. dopuszczamy $x \neq 2$ lub $x \neq 0$. Wypłaty będą

$$f(x) := w_1(x, x, x) = w_2(x, x, x) = w_3(x, x, x) = x^3 - x^2.$$

Jeśli $x \rightarrow \infty$ to $f(x) \rightarrow \infty$. Zatem gdy gracze z wielokrotnią wysiłki to ich wypłaty znacznie przekroczą te z równowag, podczas gdy równowaga daje wypłaty maksymalnie 4 patrz wykres następną stronę.

Uwaga C.D.



Zastosowanie strategii pozarównowagowej wymaga jednak zaufania do współgracza.

Przykład. Oligopol Cournota

Mamy 3 oligopolistów, firmy, którzy jako jedyni wydobywają ten sam surowiec.

- Jeśli cena surowca wyniesie p , to popyt na nie wyniesie $D(p) = 10 - 2p$;
- Zatem jeśli firma 1 wydobędzie $x > 0$, firma 2 wydobędzie $y > 0$, firma 3 wydobędzie $z > 0$, to cena rynkowa ukształtuje się na poziomie $x + y + z = 10 - 2p$ (oligopolisci tak ustawią cenę, żeby sprzedać cały towar), zatem cena wyniesie

$$p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z);$$

- Ponieważ cena nie może być ujemna, z góry wiadomo, że $x + y + z \leq 10$, zatem dziedzina to

$$\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 10\}.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

- Utarg graczy wynoszą odpowiednio:

$$u_1 = \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right)}^{\text{cena}} x,$$

$$u_2 = \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right)}^{\text{cena}} y,$$

$$u_3 = \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right)}^{\text{cena}} z.$$

- Przyjmując, że firmy ponoszą liniowe koszty wydobycia postaci

$$c_1(x) = 3x,$$

$$c_2(y) = 3y,$$

$$c_3(z) = 3z,$$

- Wyплаты dla graczy to utarg minus koszt, zatem VERTE->

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Wykłady dla graczy:

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) x - 3x, \\ w_2(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) y - 3y, \\ w_3(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) z - 3z. \end{cases}$$

Równoważnie

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = \left(2 - \frac{1}{2}(y + z)\right) x - \frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x, y, z) = \left(2 - \frac{1}{2}(x + z)\right) y - \frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x, y, z) = \left(2 - \frac{1}{2}(x + y)\right) z - \frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Ponownie funkcje są wklęsłe: w_1 względem x , w_2 względem y i w_3 względem z .

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zatem równowagę obliczymy z układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y, z) = 2 - \frac{1}{2}(y + z) - x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} w_2(x, y, z) = 2 - \frac{1}{2}(x + z) - y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} w_3(x, y, z) = 2 - \frac{1}{2}(x + y) - z = 0. \end{cases}$$

Daje to rozwiązanie $(x^*, y^*, z^*) = (1, 1, 1)$ i jest to jedyna równowaga Nasha.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Ponieważ cena wyraża się wzorem:

$$p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z),$$

mamy więc cenę po zastosowania równowagi w postaci:

$$p^* = 5 - \frac{1}{2}(1 + 1 + 1) = \frac{7}{2}.$$

Zyski przedsiębiorstw to

$$w_1(1, 1, 1) = w_2(1, 1, 1) = w_3(1, 1, 1) = \frac{7}{2} * 1 - 3 * 1 = \frac{1}{2}.$$

Przykład. Oligopol Cournota.

Rozpatrujemy model oligopolu Cournota postaci

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) x - \gamma x, \\ w_2(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) y - \gamma y, \\ w_3(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) z - \gamma z, \end{cases}$$

gdzie $\gamma > 0$ są nazywane kosztami krańcowymi wydobycia.
Równoważnie

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(y + z)\right) x - \frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x, y, z) = \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + z)\right) y - \frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x, y, z) = \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + y)\right) z - \frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Dla jakich kosztów krańcowych oligopoluści porzucą rynek?

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

Oligopoliści opuszczą rynek, gdy w równowadze Nasha koszty przekroczą utarg, czyli czy wypłata będzie ujemna. Przypomnijmy, że:

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = (5 - \gamma - \frac{1}{2}(y + z))x - \frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x, y, z) = (5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + z))y - \frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x, y, z) = (5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + y))z - \frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota. C.D.

Jeśli

$$\begin{cases} 5 - \gamma - \frac{1}{2}(y + z) > 0 \\ 5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + z) > 0 \\ 5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + y) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

funkcje wydat w_1 , w_2 i w_3 są wklęsłe w x , y i odpowiednio w z .
Wtedy przyrównamy pochodne do zera:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y, z) = 5 - \gamma - \frac{1}{2}(y + z) - x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} w_2(x, y, z) = 5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + z) - y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} w_3(x, y, z) = 5 - \gamma - \frac{1}{2}(x + y) - z = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

- Rozwiązanie $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$
 - spełnia równanie (1) tylko dla $\gamma \in (0, 5]$;
 - wtedy też rozwiązanie jest w dziedzinie, bo $x^* \geq 0, y^* \geq 0, z^* \geq 0$, oraz $x^* + y^* + z^* < 10$;
- Dla $\gamma \geq 5$, jedyną równowagą jest $(0, 0, 0)$; W takich okolicznościach firmy zostaną na rynku ale nic nie wydobędą czekając na lepsze czasy.
- Jeśli jednak $\gamma \in [0, 5)$ to równowaga Nasha wynosi

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

i da to cena $(p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z))$ wyniesie

$$p^* = 5 - \frac{3}{4}(5 - \gamma)$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

Daje to wypłatę:

$$w_1(x^*, y^*, z^*) = w_2(x^*, y^*, z^*) = w_3(x^*, y^*, z^*) := w^*,$$

gdzie

$$\begin{aligned} w^* &= \left(5 - \frac{3}{4}(5 - \gamma)\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) - \gamma \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \left(5 - \gamma - \frac{3}{4}(5 - \gamma)\right) \\ &= \frac{1}{8}(5 - \gamma)^2 > 0. \end{aligned}$$

Zatem dla $\gamma \in (0, 5)$ firmy będą wydobywać surowiec, a utarg przeważa koszty.

Przykład. Oligopol Cournota. Zmowa cenowa

Rozpatrujemy model oligopolu Cournota postaci

$$\begin{cases} w_1(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) x - \gamma x, \\ w_2(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) y - \gamma y, \\ w_3(x, y, z) = \left(5 - \frac{1}{2}(x + y + z)\right) z - \gamma z, \end{cases}$$

przy $\gamma \in (0, 5)$. Załóżmy, że doszło do zmowy cenowej i przedsiębiorcy decydują się na wydobycie x , aby wszyscy zarobili jak najwięcej. Jak ukształtuje się cena? Porównaj z ceną rynkową odpowiadającą równowadze Nasha. Czy firmy zarobią więcej?

Przykład. Rozwiązanie

Przy zmowie polegającej na wydobyciu x przez wszystkie firmy zarobią tyle samo

$$\begin{cases} w_1(x, x, x) = (5 - \frac{3}{2}x)x - \gamma x = (5 - \gamma)x - \frac{3}{2}x^2, \\ w_2(x, x, x) = (5 - \frac{3}{2}x)x - \gamma x = (5 - \gamma)x - \frac{3}{2}x^2, \\ w_3(x, x, x) = (5 - \frac{3}{2}x)x - \gamma x = (5 - \gamma)x - \frac{3}{2}x^2, \end{cases}$$

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Zatem wybiorą taki poziom zmony \tilde{x} , żeby

$$\tilde{w}(x) = (5 - \gamma)x - \frac{3}{2}x^2$$

była maksymalna. Mamy więc

$$\tilde{w}'(x) = (5 - \gamma) - 3x,$$

stąd

$$\tilde{x} = \frac{5 - \gamma}{3}.$$

Przy zmonie cena ukształtuje się na poziomie

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \gamma)$$

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Ilość dobra na rynku przy znowie.

- Przy równowadze każdy wydobędzie

$$x^* = \frac{5 - \gamma}{2},$$

a przy znowie każdy wydobędzie

$$\tilde{x} = \frac{5 - \gamma}{3},$$

czyli $\tilde{x} < x^*$, zatem przy znowie będzie mniej surowca na rynku. Zatem znowa jest niekorzystna dla gospodarki i konsumentów.

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Cena rynkowa, a cena przy zmonopolizacji.

- Przy równowadze każdy cena surowca ukształtuje się na poziomie

$$p^* = 5 - \frac{3}{4}(5 - \gamma),$$

a przy zmonopolizacji cena surowca ukształtuje się na poziomie

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \gamma),$$

czyli $\tilde{p} > p^*$, zatem przy zmonopolizacji cena surowca będzie wyższa niż cena rynkowa.

Przy zmonopolizacji cena surowca będzie większa i jest to negatywny efekt dla konsumentów.

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Czy zmowa jest korzystna dla oligopolistów?

- Przy równowadze Nasha, wypłata dla oligopolistów wyniesie

$$w^* = \frac{1}{8}(5 - \gamma)^2;$$

- Przy zmowie cena i wydobycie surowca to odpowiednio

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \gamma), \quad \text{oraz} \quad \tilde{x} = \frac{5 - \gamma}{3};$$

- Zatem zysk przedsiębiorstwa

$$\tilde{w} = \tilde{p}\tilde{x} - \gamma\tilde{x} = \frac{1}{6}(5 - \gamma)^2 > w^*.$$

Zmowa prowadzi do wzrostu zysków dla oligopolistów, ale tylko oni są jej beneficjentami.