Gry wieloosobowe

20 listopada 2024

Wieloosobowa gra ogólnie

Grę wieloososobową można zdefiniowana jako

$$(\{1, 2, ..., n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n)),$$

gdzie:

- $\{1, 2, ..., n\}$ jest zbiorem graczy;
- X_i jest niepustym zbiorem **gracza i**;
- $w_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza i**;

Gry wieloosobowe

Uwaga

Grę wieloosobową dwuosobową można zinterpretować jako następującą sytuację:

- Każdy **gracz i** niezależnie od pozostałych wybiera $x_i \in X_i$;
- Każdy **gracz i** otrzymuje wypłatę $w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$;

Uwaga

Grę wieloosobową można opisać zwięźlej, jako funkcja

$$F : \{1, 2, ..., n\} \times \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R},$$

gdzie $F(i, x_1, x_2, ..., x_n) = w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, czyli i-indeks gracza, a $(x_1, x_2, ..., x_n)$ oznacza wektor strategii poszczególnych graczy, a funcja zwraca wypłatę odpowiedniego gracza.

Definicja

Równowagą Nasha w grze wieloosobowej

$$(\{1, 2, ..., n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n))$$

nazywamy profil strategii $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ taki, że dla każdego gracza i

$$w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

$$\geq w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

dla wszystkich $x_i \in X_i$.

Uwaga

Innymi słowy:

- Żaden z graczy nie zyska wybierająca alternatywę dla równowagi, jeśli pozostali gracze konsekwentnie zastosują strategię odpowiadającą równowadze Nasha;
- Można powiedzieć, że każdy z graczy stosuje strategię równowagi Nasha, bo ... wszyscy tak robią, np. zanieczyszczają środowisko, bo wszyscy tak robią;
- Z drugiej strony każdy z graczy naprawia własne szkody, bo pozostali też tak robią i nie chcą być napiętnowani;

Uwaga

Może się zdarzyć, że odstępsto od równowagi na rzecz alternatywy przyniesie zysk graczowi i, ale pod warunkiem, że któryś z przeciwników, np. j również wybierze alternatywę x_j dla równowagi:

$$w_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots x_j^*, \ldots, x_n^*) <$$

$$< w_i(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_n^*).$$

Zatem o ile jednostronne odstępstwo od równowagi jest nieopłacalne, dwu, lub wieloosobowe ostępstwo od równowagi może przynieść zysk.

Przykład

Mamy 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartośc projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^3, y^3 i z^3;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} w_1(x, y, z) &= xyz - x^3, \\ w_2(x, y, z) &= xyz - y^3, \\ w_3(x, y, z) &= xyz - z^3, \end{aligned}$$

Znadź równowagi Nasha.

Rozwiązanie

Widać, że wszystkie funkcje wypłat w_i są wklęsłe względem strategii x_i zatem gracz 1 powinien wybrać x dla którego

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = yz - 3x^2 = 0.$$

Analogicznie postąpią pozostali gracze, czyli rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x} & = & yz - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} & = & xz - 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial z} & = & xy - 3z^2 = 0 \end{cases}$$

Jedyna równowaga Nasha to $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$, zatem koszty wkładu przekraczają potencjalne zyski z projektu.

Przykład

Mamy 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartośc projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^2, y^2 i z^2, czyli nauczył się efektowniej zarządzać kosztami;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$
\begin{aligned}
w_1(x, y, z) &= xyz - x^2, \\
w_2(x, y, z) &= xyz - y^2, \\
w_3(x, y, z) &= xyz - z^2,
\end{aligned}
$$

Znadź równowagi Nasha.

Rozwiązanie

Widać, że wszystkie funkcje wypłat w_i są wklęsłe względem strategii x_i zatem rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x} & = & yz - 2x = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} & = & xz - 2y = 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial z} & = & xy - 2z = 0 \end{cases}$$

Jedyne równowagi Nasha to $(x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, 0, 0)$, czyli tzw. *równowaga biedy* oraz $(x_2^*, y_2^*, z_2^*) = (2, 2, 2)$ zatem jest możliwość, że gracze wezmą się do pracy, jednak bierności nie można wykluczyć. Wypłaty równowagowe to odpowiednio

$$w_1(0,0,0) = w_2(0,0,0) = w_3(0,0,0) = 0, \quad \text{oraz} \quad w_1(2,2,2) = w_2(2,2,2) = w_3(2,2,2) = 4,$$

czyli równowaga, gdy gracze solidarnie angażują się w projekt daje więcej niż bierność, która prowadzi do biedy.

Uwaga

Mamy te same 3 przedsiębiorców zaangażowanych w pewien projekt.

- Gracz pierwszy wybiera swój wkład w wysokości $x \geq 0$, gracz 2 wybiera wkład $y \geq 0$, a trzeci wybiera wkład $z \geq 0$;
- Wartośc projektu to $3xyz$ jest dzielona przez graczy po równo;
- Każdy z graczy ponosi koszt wniesionego wkładu w wysokości po kolei x^2, y^2 i z^2, czyli nauczył się efektowniej zarządzać kosztami;
- Zatem wypłaty wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} w_1(x,y,z) &= xyz - x^2, \\ w_2(x,y,z) &= xyz - y^2, \\ w_3(x,y,z) &= xyz - z^2, \end{aligned}$$

Można wykazać, że nawet równowaga (2,2,2) nie daje satysfakcji graczom.

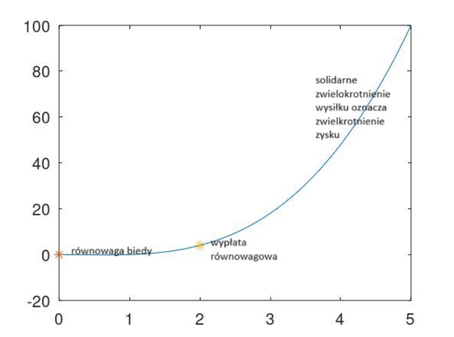
Uwaga C.D.

Załóżmy, że wysiłek graczy będzie ten sam, tzn. $x = y = z$, ale niekoniecznie będie równowagowy, tzn. dopuszczamy $x \neq 2$ lub $x \neq 0$. Wypłaty będą

$$f(x) := w_1(x, x, x) = w_2(x, x, x) = w_3(x, x, x) = x^3 - x^2.$$

Jeśli $x \to \infty$ to $f(x) \to \infty$. Zatem gdy gracze zwielokrotnią wysiłki to ich wypłaty znacznie przekroczą te z równowag, podczas gdy równowaga daje wypłaty maksymalnie 4 patrz wykres następna strona.

Uwaga C.D.



Zastosowanie strategii pozarównowagowej wymaga jednak zaufania do współgracza.

Przykład. Oligopol Cournota

Mamy 3 oligopolistów, firmy, którzy jako jedyni wydobywają ten sam surowiec.

- Jeśli cena surowca wyniesie p, to popyt na nie wyniesie $D(p) = 10 - 2p$;
- Zatem jeśli firma 1 wydobędzie $x > 0$, firma 2 wydobędzie $y > 0$, firma 3 wydobędzie $z > 0$, to cena rynkowa ukształtuje się na poziomie $x + y + z = 10 - 2p$ (oligopoliści tak ustawią cenę, żeby sprzedać cały towar), zatem cena wyniesie

$$p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z);$$

- Ponieważ cena nie może być ujemna, z góry wiadomo, że $x + y + z \leq 10$, zatem dziedzina to

$$\mathscr{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 10\}.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

- Utarg graczy wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} u_1 &= \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)}^{\textbf{cena}} x, \\ u_2 &= \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)}^{\textbf{cena}} y, \\ u_3 &= \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)}^{\textbf{cena}} z. \end{aligned}$$

- Przyjmując, że firmy ponoszą liniowe koszty wydobycia postaci

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 3x, \\ c_2(y) &= 3y, \\ c_3(z) &= 3z, \end{aligned}$$

- Wypłaty dla graczy to utarg minus koszt, zatem VERTE->

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Wypłaty dla graczy:

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)x - 3x, \\ w_2(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)y - 3y, \\ w_3(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right)z - 3z. \end{cases}$$

Równoważnie

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &= \left(2 - \frac{1}{2}(y+z)\right)x - \frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x,y,z) &= \left(2 - \frac{1}{2}(x+z)\right)y - \frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x,y,z) &= \left(2 - \frac{1}{2}(x+y)\right)z - \frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Ponownie funkcje są wklęsłe: w_1 względem x, w_2 względem y i w_3 względem z.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zatem równowagę obliczymy z układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x,y,z) & = & 2 - \frac{1}{2}(y+z) - x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} w_2(x,y,z) & = & 2 - \frac{1}{2}(x+z) - y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} w_3(x,y,z) & = & 2 - \frac{1}{2}(x+y) - z = 0. \end{cases}$$

Daje to rozwiązanie $(x^*, y^*, z^*) = (1,1,1)$ i jest to jedyna równowaga Nasha.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Ponieważ cena wyraża się wzorem:

$$p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z),$$

mamy więc cenę po zastosowania równowagi w postaci:

$$p^* = 5 - \frac{1}{2}(1 + 1 + 1) = \frac{7}{2}.$$

Zyski przedsiębiorstw to

$$w_1(1,1,1) = w_2(1,1,1) = w_3(1,1,1) = \frac{7}{2} * 1 - 3 * 1 = \frac{1}{2}.$$

Przykład. Oligopol Cournota.

Rozpatrujemy model oligopolu Curnota postaci

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right) x - \gamma x, \\ w_2(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right) y - \gamma y, \\ w_3(x,y,z) &= \left(5 - \frac{1}{2}(x+y+z)\right) z - \gamma z, \end{cases}$$

gdzie $\gamma > 0$ są nazywane kosztami krańcowymi wydobycia. Równoważnie

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &= \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(y+z)\right) x - \frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x,y,z) &= \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(x+z)\right) y - \frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x,y,z) &= \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}(x+y)\right) z - \frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Dla jakich kosztów krańcowych oligopoliści porzucą rynek?

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

Oligopoliści opuszczą rynek, gdy w równowadze Nasha koszty przekroczą utarg, czyli czy wypłata będzie ujemna. Przypomnijmy, że:

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &= \left(5-\gamma-\frac{1}{2}(y+z)\right)x-\frac{1}{2}x^2, \\ w_2(x,y,z) &= \left(5-\gamma-\frac{1}{2}(x+z)\right)y-\frac{1}{2}y^2, \\ w_3(x,y,z) &= \left(5-\gamma-\frac{1}{2}(x+y)\right)z-\frac{1}{2}z^2. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota. C.D.

Jeśli

$$\begin{cases} 5-\gamma-\frac{1}{2}(y+z)>0 \\ 5-\gamma-\frac{1}{2}(x+z)>0 \\ 5-\gamma-\frac{1}{2}(x+y)>0, \end{cases} \tag{1}$$

funkcje wypłat w_1, w_2 i w_3 są wklęsłe w x, y i odpowiednio w z. Wtedy przyrównamy pochodne do zera:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}w_1(x,y,z) &=& 5-\gamma-\frac{1}{2}(y+z)-x=0, \\ \frac{\partial}{\partial y}w_2(x,y,z) &=& 5-\gamma-\frac{1}{2}(x+z)-y=0, \\ \frac{\partial}{\partial z}w_3(x,y,z) &=& 5-\gamma-\frac{1}{2}(x+y)-z=0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

- Rozwiązanie $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$
  - spełnia równanie (1) tylko dla $\gamma \in (0, 5]$;
  - wtedy też rozwiązanie jest w dziedzinie, bo $x^* \geq 0, y^* \geq 0, z^* \geq 0$, oraz $x^* + y^* + z^* < 10$;
- Dla $\gamma \geq 5$, jedyną równowagą jest $(0, 0, 0)$; W takich okolicznościach firmy zostaną na rynku ale nic nie wydobędą czekając na lepsze czasy.
- Jeśli jednak $\gamma \in [0, 5)$ to równowaga Nasha wynosi

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

i da to cena $(p = 5 - \frac{1}{2}(x + y + z))$ wyniesie

$$p^* = 5 - \frac{3}{4}(5 - \gamma)$$

Rozwiązanie. Oligopol Cournota.

Daje to wypłatę:

$$w_1(x^*, y^*, z^*) = w_2(x^*, y^*, z^*) = w_3(x^*, y^*, z^*) := w^*,$$

gdzie

$$\begin{aligned} w^* &= \left(5 - \frac{3}{4}(5-\gamma)\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) - \gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\left(5 - \gamma - \frac{3}{4}(5-\gamma)\right) \\ &= \frac{1}{8}(5-\gamma)^2 > 0. \end{aligned}$$

Zatem dla $\gamma \in (0, 5)$ firmy będą wydobywać surowiec, a utarg przeważy koszty.

Przykład. Oligopol Cournota. Zmowa cenowa

Rozpatrujemy model oligopolu Curnota postaci

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) &=& \left(5-\frac{1}{2}(x+y+z)\right)x-\gamma x, \\ w_2(x,y,z) &=& \left(5-\frac{1}{2}(x+y+z)\right)y-\gamma y, \\ w_3(x,y,z) &=& \left(5-\frac{1}{2}(x+y+z)\right)z-\gamma z, \end{cases}$$

przy $\gamma \in (0,5)$. Załóżmy, że doszło do zmowy cenowej i przedsiębiorcy decydują się na wydobycie x, aby wszyscy zarobili jak najwięcej. Jak ukształtuje się cena? Porównaj z ceną rynkową odpowiadającą równowadze Nasha. Czy firmy zarobią więcej?

Przykład. Rozwiązanie

Przy zmowie polegającej na wydobyciu x przez wszystkie firmy zarobią tyle samo

$$\begin{cases} w_1(x,x,x) &= \left(5-\frac{3}{2}x\right)x-\gamma x=(5-\gamma)x-\frac{3}{2}x^2, \\ w_2(x,x,x) &= \left(5-\frac{3}{2}x\right)x-\gamma x=(5-\gamma)x-\frac{3}{2}x^2, \\ w_3(x,x,x) &= \left(5-\frac{3}{2}x\right)x-\gamma x=(5-\gamma)x-\frac{3}{2}x^2, \end{cases}$$

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Zatem wybiorą taki poziom zmowy $\tilde{x}$, żeby

$$\tilde{w}(x) = (5-\gamma)x - \frac{3}{2}x^2$$

była maksymalna. Mamy więc

$$\tilde{w}'(x) = (5-\gamma) - 3x,$$

stąd

$$\tilde{x} = \frac{5-\gamma}{3}.$$

Przy zmowie cena ukształtuje się na poziomie

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma)$$

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Ilośc dobra na rynku przy zmowie.

- Przy równowadze każdy wydobędzie

$$x^* = \frac{5-\gamma}{2},$$

a przy zmowie każdy wydobędzie

$$\tilde{x} = \frac{5-\gamma}{3},$$

czyli $\tilde{x} < x^*$, zatem przy zmowie będzie mniej surowca na rynku. Zatem zmowa jest niekorzystna dla gospodarki i konsumentów.

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Cena rynkowa, a cena przy zmowie.

- Przy równowadze każdy cena surowca ukształtuje się na poziomie

$$p^* = 5 - \frac{3}{4}(5 - \gamma),$$

a przy zmowie cena surowca ukształtuje się na poziomie

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \gamma),$$

czyli $\tilde{p} > p^*$, zatem przy zmowie cena surowca będzie wyższa niż cena rynkowa.

Przy zmowie cena surowca będzie większa i jest to negatywny efekt dla konsumentów.

Przykład. Rozwiązanie C.D.

Czy zmowa jest korzystna dla oligopolistów?

- Przy równowadze Nasha, wypłata dla oligopolistów wyniesie

$$w^* = \frac{1}{8}(5-\gamma)^2;$$

- Przy zmowie cena i wydobycie surowca to odpowiednio

$$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma), \quad \text{oraz} \quad \tilde{x} = \frac{5-\gamma}{3};$$

- Zatem zysk przedsiębiorstwa

$$\tilde{w} = \tilde{p}\tilde{x} - \gamma\tilde{x} = \frac{1}{6}(5-\gamma)^2 > w^*.$$

Zmowa prowadzi do wzrostu zysków dla oligopolistów, ale tylko oni są jej beneficjentami.