Gry wieloosobowe

22 stycznia 2025

Wieloosobowa gra ogólnie-powtórka

Grę wieloososobową można zdefiniowana jako

$$(\{1,2,...,n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n)),$$

gdzie:

- $\{1,2,...,n\}$ jest zbiorem graczy;
- X_i jest niepustym zbiorem **gracza i**;
- $w_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza i**;

Gry wieloosobowe-powtórka

Uwaga

Grę wieloosobową dwuosobową można zinterpretować jako następującą sytuację:

- Każdy **gracz i** niezależnie od pozostałych wybiera $x_i \in X_i$;
- Każdy **gracz i** otrzymuje wypłatę $w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$;

Uwaga

Grę wieloosobową można opisać zwięźlej, jako funkcja

$$F : \{1, 2, ..., n\} \times \prod_{i=1}^{n} X_i \mapsto \mathbb{R},$$

gdzie $F(i, x_1, x_2, ..., x_n) = w_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, czyli i-indeks gracza, a $(x_1, x_2, ..., x_n)$ oznacza wektor strategii poszczególnych graczy, a funcja zwraca wypłatę odpowiedniego gracza.

Definicja

Równowagą Nasha w grze wieloosobowej

$$(\{1, 2, ..., n\}, X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, (w_1, w_2, ..., w_n))$$

nazywamy profil strategii $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ taki, że dla każdego gracza i

$$w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

$$\geq w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

dla wszystkich $x_i \in X_i$.

Uwaga

Innymi słowy:

- Żaden z graczy nie zyska wybierająca alternatywę dla równowagi, jeśli pozostali gracze konsekwentnie zastosują strategię odpowiadającą równowadze Nasha;
- Można powiedzieć, że każdy z graczy stosuje strategię równowagi Nasha, bo ... wszyscy tak robią, np. zanieczyszczają środowisko, bo wszyscy tak robią;
- Z drugiej strony każdy z graczy naprawia własne szkody, bo pozostali też tak robią i nie chcą być napiętnowani;

Równowaga Nasha-powtórka

Uwaga

Może się zdarzyć, że odstępsto od równowagi na rzecz alternatywy przyniesie zysk graczowi i, ale pod warunkiem, że któryś z przeciwników, np. j również wybierze alternatywę x_j dla równowagi:

$$w_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots x_j^*, \ldots, x_n^*) <$$

$$< w_i(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_n^*).$$

Zatem o ile jednostronne odstępstwo od równowagi jest nieopłacalne, dwu, lub wieloosobowe ostępstwo od równowagi może przynieść zysk.

Oznaczenie

Dla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ zdefiniujmy

$$x_{-i} := \begin{cases} (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 1, \\ (x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 3, \ldots, n-2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n) & \text{dla} \quad i = n-1, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \text{dla} \quad i = n, \end{cases}$$

Analogicznie definujemy X_{-i}. Zdefiniujmy również:

$$(x_{-i}, x_i') := \begin{cases} (x_i', x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 1, \\ (x_1, x_2', x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \text{dla} \quad i = 3, \ldots, n-2, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}', x_n) & \text{dla} \quad i = n-1, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n') & \text{dla} \quad i = n. \end{cases}$$

Równowaga Nasha

Definicja

W grze n osobowej o wypłatach dla gracza i postaci

$$w_i : X_1 \times \ldots X_n \mapsto \mathbb{R},$$

funkcją najlepszych odpowiedzi dla gracza i na profil pozostałych graczy $x_{-i} \in X_{-i}$ nazywamy $BR_i : X_{-i} \mapsto X_i^2$ jako

$$BR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i' \in X_i} w_i(x_{-i}, x_i')$$

Uwaga

Profil $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ jest równowagą Nasha wtedy i tylko wtedy gdy

$$x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*)$$

dla wszystkich $i = 1, 2, ..., n$.

Przykład. Oligopol Cournota

Mamy n oligopolistów, firmy, którzy jako jedyni wydobywają ten sam surowiec.

- Jeśli cena surowca wyniesie p, to popyt na nie wyniesie $D(p) = 10 - 2p$;
- Zatem jeśli firma i wydobędzie $x_i \geq 0$, to cena rynkowa ukształtuje się na poziomie

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10 - 2p$$

(oligopoliści tak ustawią cenę, żeby sprzedać cały towar), zatem cena wyniesie

$$p = 5 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

- Ponieważ cena nie może być ujemna, z góry wiadomo, że $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 10$, zatem dziedzina to

$$\mathscr{D} := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 10 \right\}.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Pytania:

1. Jak ukształtuje się wydobycie w równowadze Nasha?
2. Jak ukształtuje się cena w równowadze Nasha?
3. Czy w równowadze Nasha oligopoliści osiągną zysk, czy straty?
4. Czy istnieje możliwość zmowy cenowej, które wszystkim graczom przyniesie większy zysk niż ten w równowadze?

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zanim odpowiemy na pytania, skonstruujemy model.

- Utarg gracza i wynosi odpowiednio:

$$u_i = \overbrace{\left(5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}^{cena} x_i,$$

- Przyjmując, że firmy ponoszą liniowe koszty wydobycia postaci

$$c_i(x) = \gamma x,$$

- Wypłaty dla graczy to utarg minus koszt, zatem VERTE->

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Wypłaty dla graczy:

$$w_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \left(5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) x_i - \gamma x_i,$$

Równoważnie

$$w_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^{n} x_j\right) x_i - \frac{1}{2}x_i^2.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

- Jeśli $\gamma \geq 5$, to jedyna optymalna reakcja to $x_i = 0$ dla wszystkich $i = 1, 2, ..., n$ i wtedy jedyną równowagą jest profil postaci $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = (0, 0, ..., 0)$, bowiem

$$w(x_1, ..., x_n) = \underbrace{\left(5 - \gamma - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^{n} x_j\right)}_{\text{liczba ujemna lub 0.}} x_i - \frac{1}{2}x_i^2;$$

- Przyjmijmy zatem, że $\gamma < 5$.

Wtedy optymalne wydobycie dla $i = 1, ..., n$ spełnia

$$\frac{\partial w_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^{n} x_j\right) - x_i = 0.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Rozwiązanie ma postać macierzową

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\gamma \\ 5-\gamma \\ 5-\gamma \\ \vdots \\ 5-\gamma \end{bmatrix}$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Rozwiązanie ma postać macierzową

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 2\gamma \\ 10 - 2\gamma \\ 10 - 2\gamma \\ \vdots \\ 10 - 2\gamma \end{bmatrix}$$

Równowaga Nasha

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Po zastosowania eliminacji Gaussa mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 10-2\gamma \end{bmatrix},$$

zatem $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, oraz $(n-1)x_1 + 2x_1 = 10 - 2\gamma$, czyli $x_1 = \frac{10-2\gamma}{n+1}$, oraz

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \left(\frac{10-2\gamma}{n+1}, \frac{10-2\gamma}{n+1}, \ldots, \frac{10-2\gamma}{n+1}\right)$$

jest równowagą Nasha (gdy $\gamma < 5$).

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

- Równowaga

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \left(\frac{10-2\gamma}{n+1}, \frac{10-2\gamma}{n+1}, \ldots, \frac{10-2\gamma}{n+1}\right)$$

jest jedyną równowagą **gdy wszyscy oligopoliści wydobywają surowiec**;

- Czy istnieją równowagi, gdy niektórzy oligopoliści wydobywają surowiec, podczas gdy inni nie wydobędą surowca?

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Załóżmy, że istnieje równowaga postaci

$$(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k \text{ zer}}), \text{ gdzie } x_i^* > 0 \text{ dla } i = 1, 2, ..., k.$$

- Zatem gracze $1, 2, ..., k$ wydobędą zasoby, tzn. $x_i^* > 0$ dla $i = 1, 2, ..., k$, a pozostali nie wydobędą zasobów, tzn. $x_{k+1}^* = x_{k+1}^* = \ldots = x_n^* = 0$;
- Gracze $1, 2, ..., k$ są czynnymi uczestnikami gry, a gracze $k+1, k+2, ..., n$ są biernymi, czyli gracze $1, 2, ..., k$ zachowują się jak w grze k-osobowej, a tam analogicznie jak w pełnej grze, jedyna równowaga $(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*)$ to taka, że

$$x_1^* = x_2^* = \ldots = x_k^* = \frac{10 - 2\gamma}{k+1}.$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zatem równowaga byłaby postaci:

$$(x_1^*, ..., x_n^*) = \left(\underbrace{\frac{10-2\gamma}{k+1}, \ldots, \frac{10-2\gamma}{k+1}}_{k \text{ razy}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ razy}} \right).$$

Pozostaje rozstrzygnąć czy dla graczy $i > k$ rzeczywiście opłaca się zaniechać wydobycia w takim układzie.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zatem dla $i > k$ wypłata będzie postaci:

$$\begin{aligned} w_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) &= \left(5 - \gamma - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^{n} x_j^*\right) x_i - \frac{1}{2} {x_i}^2 \\ &= \left(5 - \gamma - \frac{k}{k+1}(5-\gamma)\right) x_i - \frac{1}{2} {x_i}^2 \\ &= \frac{5-\gamma}{k+1} x_i - \frac{1}{2} {x_i}^2. \end{aligned}$$

Jednak dla gracza $i > k$ jego wypłata osiąga maksimum dla $\frac{5-\gamma}{k+1} > 0$, zatem

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k \text{ zer}}), \text{ gdzie } x_i^* > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k$$

nie może być równowagą Nasha. Podobnie dowiedziemy, że żaden profil $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ taki, że $x_{i_j}^* = 0$ dla pewnych $i_1, i_2, \ldots, i_k$, nie jest równowagą Nasha.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Podsumowując:

- Jeśli $\gamma < 5$ jedyną równowagą Nasha jest profil postaci:

$$(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \left(\frac{10 - 2\gamma}{n+1}, \frac{10 - 2\gamma}{n+1}, \ldots, \frac{10 - 2\gamma}{n+1} \right);$$

- Jeśli $\gamma \geq 5$ jedyną równowagą Nasha jest profil postaci:

$$(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = (0, 0, \ldots, 0) .$$

Kolejne pytanie jak ukształtuje się cena.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Przypominając, że cena kształtuje się na poziomie,

$$p = 5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i :$$

- Jeśli $\gamma > 5$ to $p^* = 5$, ale co z tego skoro na rynku nie będzie dobra.
- Jeśli $\gamma \leq 5$ to cena zostanie ustalona jako:

$$p^* = 5 - \frac{n}{n+1}(5-\gamma) = \frac{5}{n+1} + \gamma\frac{n}{n+1}.$$

Następnie pytamy, czy oligopoliści osiągną zyski.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Wypłatę dla gracza i w równowadze można również wyrazić jako

$$w_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) = p^* x_i^* - \gamma x_i^* = (p^* - \gamma) x_i^*,$$

gdzie $p^* = 5 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^*$.VERTE->

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Wtedy

- Jeśli $\gamma \geq 5$ to $p^* = 5$, ale i tak oligopoliści nie wydobędą dobra, zatem
$$w^* = w_i(0, 0, \ldots, 0) = 0;$$
- Jeśli $\gamma < 5$ to cena została ustalona jako
$$p^* = \frac{5}{n+1} + \gamma \frac{n}{n+1},$$
natomiast każda firma i ustali wydobycie na poziomie
$$x_i^* = \frac{10 - 2\gamma}{n+1},$$
zatem
$$w^* = w_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 2\left(\frac{5-\gamma}{n+1}\right)^2 > 0.$$

Oligopoliści osiągną zyski. Ostatnie pytanie. Czy istnieje pole do zmowy cenowej?

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Do zmowy dojdzie jeśli wszyscy gracze zdecydują się na wydobycie które im wszystkim zapewni maksymalny zysk.

- Mamy

$$w_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) x_i - \gamma x_i;$$

- Jeśli $x_1 = x_2 = ... = x_n := x$, wtedy

$$w(x) = w_i(x, x, ..., x) = \left(5 - \frac{1}{2}nx\right) x - \gamma x = (5-\gamma)x - \frac{1}{2}nx^2;$$

- Zatem jeśli $\gamma \geq 5$ to optymalne wydobycie to nadal $\tilde{x} = 0$, a jeśli $\gamma < 5$, to optymalne wydobycie wyniesie $\tilde{x} = \frac{5-\gamma}{n}$.

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Zatem, gdy $\gamma < 5$, to przy zmowie

- Optymalne wydobycie:

$$\tilde{x} = \frac{5-\gamma}{n};$$

- Wtedy cena będzie na pozimie

$$\tilde{p} = 5 - \frac{n}{2}\tilde{x} = 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma).$$

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

Podsumowując, gdy $\gamma < 5$:

- Optymalne wydobycie będzie postaci:
  1. W równowadze postaci $(x_1^*, \dots, x_n^*) = (x^*, \dots, x^*)$ mamy
     $$x^* = \frac{10 - 2\gamma}{n} = \frac{5 - \gamma}{\frac{1}{2}(n+1)}$$
     na firmę;
  2. Przy zmowie mamy profil postaci $(\tilde{x}, \dots, \tilde{x})$, gdzie
     $$\tilde{x} = \frac{5 - \gamma}{n};$$
- Zatem $x^* > \tilde{x}$, co więcej $\frac{\tilde{x}}{x^*} = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}$, czyli przy zmowie surowca będzie ponad 2 razy mniej surowca niż w równowadze. VERTE->

Przykład. Oligopol Cournota C.D.

- Cena ukształtuje się na poziomie :
  1. W równowadze mamy cenę postaci:

     $$p^* = 5 - \frac{n}{n+1}(5-\gamma) = \frac{5}{n+1} + \gamma\frac{n}{n+1}$$

     na firmę;
  2. Przy zmowie mamy cenę postaci $(\tilde{x}, ..., \tilde{x})$

     $$\tilde{p} = 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma)$$

- Zatem $\tilde{p} > p^*$, co więcej przy zmowie, niezależnie od liczby oligopolistów, cena będzie ukształtowana tak jak przy monopolu, czyli tak jakby $n = 1$.

Zmowa cenowa powoduje ubytek dobra na rynku i wzrost cen!

Przykład. Oligopol Cournota. Interwencja państwa

- Kontynuujemy poprzedni przykład z zastrzeżeniem, że państwo rozważa nałożenie opodatkowania lub ulgę podatkową z utargu w wysokości $\tau \in (-1, 1)$;
  - $\tau > 0$ oznacza opodatkowanie utargu,
  - $\tau < 0$ oznacza ulgę podatkową;
- Jak to wpłynie na zachowanie oligopolostów?

Przykład. Oligopol Cournota. Interwencja państwa

- Wypłata jest postaci

$$w_i(x_1, \dots, x_n) = (1 - \tau)\left(5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) x_i - \gamma x_i;$$

- Zatem gra jest równoważna grze postaci:

$$v_i(x_1, \dots, x_n) = \left(5 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) x_i - \frac{\gamma}{1-\tau} x_i,$$

czyli

- jeśli $\tau > 0$ to firmy włączą podatek w koszty produkcji;
- jeśli $\tau < 0$ to firma interpretuje ulgę jako redukcję kosztów produkcji;

Przykład. Oligopol Cournota. Interwencja państwa. C.D.

- Jeśli państwo opodatkuje utarg i $\tau > 0$, to firmy mogą zniechęcą się do produkcji, bo do produkcji potrzebują, żeby $\gamma < 5(1-\tau) < 5$, bez opodatkowania wystarczyło, żeby $\gamma < 5$;
- Jeśli państwo zastosuje ulgę podatkową od utargu i $\tau < 0$, to firmy mogą zachęcić się do produkcji, bo wystarczy im żeby $\gamma < 5(1-\tau)$, a wcześniej producenci wymagali $\gamma < 5$;
- Innymi słowy, podatek zniechęca do produkcji, a ulga podatkowa zachęca do produkcji;

Przykład. Oligopol Cournota. Interwencja państwa. C.D.

- Jeśli jednak $\gamma < 5(1-\tau)$, oraz $\tau > 0$ to opodatkowanie nie zniechęciło jeszcze do produkcji, ale zachęciło do zmowy, oraz:

$$\tilde{x}^{\tau} = \frac{5 - \frac{\gamma}{1-\tau}}{n} < \frac{5-\gamma}{n} = \tilde{x},$$

 więc firmy jeszcze bardziej ograniczyły wydobycie;

- Przy $\gamma < 5(1-\tau)$ i przy zmowie, cena po opodatkowaniu będzie

$$\tilde{p}^{\tau} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \frac{\gamma}{1-\tau}) > 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma) = \tilde{p},$$

 więc firmy podniosły ceny po dodatkowym opodatkowaniu;VERTE.

Przykład. Oligopol Cournota. Interwencja państwa. C.D.

- Jeśli jednak $\gamma \leq 5(1-\tau)$, oraz $\tau < 0$ to ulga nie zniechęciła do zmowy, ale:

$$\tilde{x}^{\tau} = \frac{5 - \frac{\gamma}{1-\tau}}{n} > \frac{5-\gamma}{n} = \tilde{x},$$

  więc firmy zwiększyły wydobycie;

- Przy $\gamma \leq 5(1-\tau)$, $\tau < 0$ i przy zmowie, cena po zastosowaniu ulgi będzie

$$\tilde{p}^{\tau} = 5 - \frac{1}{2}(5 - \frac{\gamma}{1-\tau}) < 5 - \frac{1}{2}(5-\gamma) = \tilde{p},$$

  więc firmy obniżyły ceny po otrzymaniu ulgi podatkowej.

Przykład. Oligopol Bertranda z nieograniczonym popytem.

Na rynku jest n firm produkujących dane dobro.

- Koszty produkcji x_i jednostek dobra kształtują się na poziomie $c_i(x_i) = \gamma x_i$, jak w Oligopolu Cournota;
- Każda z firm ustala niezależnie cenę sprzedaży dobra p_i;
- Firma, która ustala najniższą cenę przejmuje cały rynek, a jeśli więcej niż jedna firma zaoferuje najniższą cenę, te firmy dzielą rynek po równo;
- Przyjmijmy, że ostatecznie dobro zostanie zakupione, niezależnie od wynegocjowanej ceny.

Przykład. Oligopol Bertranda. C.D.

- Zatem jeśli firma i ustali cenę p_i, wypłata wyniesie:

$$w_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{cases} \frac{p_i - \gamma}{\#\{j : p_j = p_i\}} & \text{jeśli} \quad p_i \geq p_j \text{ dla } j \neq i, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

  Tu $\#\{j : p_j = p_i\}$ oznacza liczbę wszystkich graczy oferujących identyczną cenę jak i.
- Bez straty ogólności przyjmiemy, że $p_i \geq \gamma$ dla wszystkich i.
- Pokażemy, że jedyna równowaga Nasha to

$$(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = (\gamma, \gamma, \dots, \gamma),$$

  więc w równowadze nikt nie zarobi.

Przykład. Oligopol Bertranda. C.D.

- Załóżmy, że poza graczem i, co najmniej jeden z pozostałych cenę $p_j^* = \gamma$, czyli najniższą z możliwych;
- Jeśli gracz i zaoferuje wyższą cenę, straci rynek, a jeśli zaoferuje $p_j^* = \gamma$, sprzeda dobro po cenie kosztów produkcji, więc nie straci, ale też nie zyska;
- Innymi słowy $w_i(p_{-i}^*, p_i) \equiv 0$ dla $p_i \geq \gamma$, czyli funkcja najlepszych odpowiedzi spełnia

$$BR(p_{-i}) = [\gamma, \infty),$$

zatem każdy profil, gdzie co najmniej jedna z firm zaoferuje cenę γ jest równowagą Nasha.

Przykład. Oligopol Bertranda. C.D.

- Pokażemy, że nie ma innych równowag Nasha niż ta wymieniona.
- Odwołamy się do funkcji najlepszych odpowiedzi dla gracza i na profil pozostałych p_{-i}:
  - Niech
    $$\underline{p} = \min\{p_j : j \neq i\}$$
    i $\underline{p} > \gamma$, oraz niech
    $$N_i := \#\{j \neq i : p_j = \underline{p}\};$$
  - Wtedy
    $$w_i(p_{-i}, p_i') = \begin{cases} p_i' - \gamma & \text{gdy} \quad p_i' < \underline{p}, \\ \frac{p_i' - \gamma}{N_i + 1} & \text{gdy} \quad p_i' = \underline{p}, \\ 0 & \text{jeśli} \quad p_i' > \underline{p}. \end{cases}$$

Przykład. Oligopol Bertranda. C.D.

- Ponieważ $\bar{p} > \gamma$, $w_i(p_{-i}, p_i')$ rośnie do $\underline{p}$, ale tam maksimum nie osiągnie, bo tam nastąpi skok w dół i dalej funkcja maleje;
- Stąd $BR_i(p) = \emptyset$;
- Wobec tego nie istnieje równowaga Nasha taka, że $\min\{p_i : i = 1, 2, ..., n\} > \gamma$.

Przykład. Oligopol Bertranda. C.D.

Podsumowując, zbiór równowag Nasha:

$$NE = \{(p_1, p_2, ..., p_n) \in [\gamma, \infty) : \min(p_1, p_2, ..., p_n) = \gamma\}.$$

- W takim układzie nikt nie zarobi, nawet zwycięzca licytacji cenowej;
- Pozostaje zmowa, która umożliwia wybór nieograniczenie dużej ceny:
  - Każda firma umawia się na cenę p, znacznie powyżej γ;
  - Każda firma otrzyma wtedy $\frac{1}{n}(p - \gamma)$.