Gry o sumie niezerowej

6 listopada 2024

Gra o sumie niezerowej ogólnie

Grę dwuosobową o sume niezerowej można zdefiniowana jako (X, Y, w_1, w_2), gdzie:

- X, niepusty zbiór strategii dla **gracza 1**;
- Y, niepusty zbiór strategii dla **gracza 2**;
- $w_1 : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza 1**;
- $w_2 : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypłaty dla **gracza 2**;

Grę dwuosobową o sume zerowej nazywamy grę postaci $(X, Y, w, -w)$ dla $w : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ i będziemy ją oznaczać w skrócie jako (X, Y, w).

Gra o sumie niezerowej ogólnie

Grę dwuosobową o sume niezerowej można zinterpretować jako:

- **Gracz 1** wybiera $x \in X$;
- **Gracz 2** wybiera $y \in Y$, niezależnie od gracza 1;
- **Gracz 1** otrzymuje wypłatę $w_1(x, y)$;
- **Gracz 2** otrzymuje wypłatę $w_2(x, y)$;

Gra o zumie niezerowej

Szczególne przypadki:

- Gra macierzowa o sumie zerowej $X = \{1, 2, ..., m\}$, $Y = \{1, 2, ..., n\}$, a $w_1(x, y) = a_{xy}$, $w_2(x, y) = -a_{xy}$, gdzie a_{xy} to element macierzy $\mathbb{A}$ o wierszu x i kolumnie y;
- Gra dwumacierzowa o sumie niezerowej $X = \{1, 2, ..., m\}$, $Y = \{1, 2, ..., n\}$, a $w_1(x, y) = a_{xy}$, $w_2(x, y) = b_{xy}$, gdzie a_{xy} to element macierzy $\mathbb{A}$ o wierszu x i kolumnie y, a b_{xy} to element macierzy $\mathbb{B}$ o wierszu x i kolumnie y;

Uwaga

Gdy X i Y są zbiorami skończonymi, grę można sprowadzić do postaci dwumacierzowej.

Przykład, producent i konsument

Na rynku jest producent (monopolista) danego dobra i konsumenci. Producent ustala cenę w wysokości $p > 0$, a konsumenci zdecydują się na zakup, lub nie.

- **Popyt.** Ilość dobra, które producent jest w stanie sprzedać;
- **Podaż.** Ilość dobra, które producent wytworzy i wprowadzi na rynek;
- **Utarg.** Kwota uzyskana ze sprzedarzy dobra;
- **Zysk.** Utarg pomniejszony o koszty produkcji.

Cel:

- **Producent:** maksymalizuje swój zysk;
- **Konsument:** kupić jak najwięcej dobra po możliwie najniższej cenie.

Przykład, producent i konsument C.D.

Załóżmy, że producent ustali cenę $p > 0$.

- Wtedy popyt na dane dobro zostanie ustalony przy funcji popytu $D(p)$, gdzie $D : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle malejącą i ciągłą;
- Jeśli producent wprowadzi na rynek x jednostek, poniesie koszty produkcji $C(x)$, gdzie $C : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, gdzie jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą;
- Niech x będzie ilością dobra wprowadzonego na rynek, a p ceną jednostkową.

Przykład, producent i konsument C.D.

Producent:

1. Jeśli wprowadzi na rynek dobro w ilości $x > D(p)$, to jego zysk wyniesie

$$\pi = pD(p) - C(x)$$

Lepiej wprowadzić na rynek dokładnie $x' = D(p)$, bo wtedy zysk wyniesie

$$\pi' = px' - C(x') = pD(p) - C(D(p)) > pD(p) - C(x) = \pi;$$

2. Jeśli wprowadzi na rynek dobro w ilości $x < D(p)$, to jego zysk wyniesie

$$\pi = px - C(x)$$

Lepiej podnieść cenę, $p' > p$ tak aby było dokładnie $x = D(p')$, bo wtedy zysk wyniesie

$$\pi' = p'x - C(x) > px - C(x) = \pi;$$

Zatem z góry wiemy, że ustali cenę na poziomie $p = D^{-1}(x)$, gdzie x ilość popytu i zysk wyniesie:

$$\pi = xD^{-1}(x) - C(x).$$

Przykład, producent i konsument C.D.

Konsument:

1. Możma przyją,ć, że typowy konsument kupują x dobra, to zysk

$$u = -(D(p) - x)^2,$$

2. Wtedy idealną użyteczność przy rozsądnych kosztach otrzyma gdy $x = D(p)$.

Przykład, producent i konsument C.D.

Sformułowanie w języku teorii gier:

- **Strategie** producenta i konsumenta są w zbiorze $X = Y = (0, \infty)$, gdzie $x \in X$-poziom produkcji producenta i $x \in Y$, poziom konsumpcji konsumenta;
- **Wypłata** producenta i konsumenta to odpowiednio

$$w_1(x, y) = xD^{-1}(x) - C(x),$$

$$w_2(x, y) = -(y - D^{-1}(x))^2.$$

Przykład, Duopol Cournota

Na rynku są dwie firmy, firma 1 i firma 2 produkujące to samo dobro. Każda firma decyduje się na poziom produkcji z przedziału $[0, 1]$, gdzie 0 to zaniechanie produkcji, a 1 to wykorzystanie wszystkich mocy produkcyjnych.

Przykład, Duopol Cournota C.D.

- Cena ustalana jest wspólnie przez obie firmy w zależności od popytu;
- Cena generuje popyt wg ściśle rosnącej i ciągłej funkcji popytu $D(\cdot)$: gdy firma 1 wyprodukuje dobro w wielkości x, a firma 2 wyprodukuje dobro w wielkości y, cena zostanie ustalona jako rozwiązanie równania $D(p) = x + y$, lub równoważnie $p = D^{-1}(x + y)$; .
- Koszty produkcji firmy 1 to $C_1(x)$, a koszty produkcji firmy 2 to $C_2(y)$;
- Utarg firmy 1 to $xp = xD^{-1}(x + y)$, a utarg firmy 2 to $yp = yD^{-1}(x + y)$;

Przykład, Duopol Cournota C.D.

Zyski obu firm:

$$w_1(x, y) = xD^{-1}(x + y) - C_1(x),$$

oraz

$$w_2(x, y) = yD^{-1}(x + y) - C_2(y),$$

gdzie $x \in X = [0, 1]$, $y \in Y = [0, 1]$.

Przykład, zaangażowanie we wspólny projekt

Wspólnicy pracują nad wspólnym projektem. Każdy z nich wkłada w niego wysiłek: wspólnik 1 wkłada $x \geq 0$, a wspólnik nr 2 wkłada $y \geq 0$.

- Wspólnik 1 czerpie zysk z projektu w wysokości $\gamma_1 xy$, wspólnik 2 czerpie zysk z projektu w wysokości $\gamma_2 xy$ ($\gamma_i > 0$ jest poziomem wrażliwości na jakość projektu wspólnika i, $i = 1, 2$);
- Wspólnik 1 ponosi koszty $C_1(x)$, a wspólnik 2 ponosi koszty $C_2(y)$ wysiłku projektu;

Przykład, zaangażowanie we wspólny projekt C.D.

Zbiory strategii dla abu wspólników:

$$X = Y = [0, \infty),$$

w funkcje wypłat $w_1 : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ i $w_2 : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ mają postać:

$$w_1(x, y) = \gamma_1 xy - C_1(x),$$

dla wspólnika 1, oraz

$$w_2(x, y) = \gamma_2 xy - C_2(y)$$

dla wspólnika 2.

Funkcja najlepszych odpowiedzi

Funkcję najlepszych odpowiedzi dla gracza nr 1 na strategię gracza 2 definiujemy jako:

$$BR_1(y) = \arg\max_{x \in X} w_1(x, y).$$

Funkcję najlepszych odopwiedzi dla gracza nr 2 na strategię gracza 1 definiujemy jako:

$$BR_2(x) = \arg\max_{y \in Y} w_2(x, y).$$

Definicja

Równowagą Nasha w grze (X, Y, w_1, w_2) nazywamy taki układ strategii $(x^*, y^*) \in X \times Y$ dla obu graczy dla których:

$$w_1(x^*, y^*) \geq w_1(x, y^*), \quad \text{dla wszystkich } y \in Y,$$

oraz

$$w_2(x^*, y^*) \geq w_2(x^*, y), \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Jak rozwiązać grę o sumie niezerowej

Uwaga

(x^*, y^*) jest równowagą Nasha jeśli

- x^* jest optymalną strategią dla gracza 1, gdy gracz 2 stosuje y^*, oraz;
- y^* jest optymalną strategią dla gracza 2, gdy gracz 1 stosuje x^*;
- Zatem (x^*, y^*) są dla siebie wzajemnie optymalne.

Jak rozwiązać grę o sumie niezerowej

Równowagi Nasha w grach dwumacierzowych

(x^*, y^*) jest równowagą Nasha w grze (X, Y, w_1, w_2) jeśli

- para strategii optymalnych jest równowagą Nasha w grze o sumie zerowej (również w grze rozszerzonej);
- w grze jastrząb-gołąb, oraz jastrząb-gołąb-chojrak-mściciel, równowaga ewolucyjna jest równowagą Nasha w grze rozszerzonej;

Jak rozwiązać grę o sumie niezerowej

Definicja

Parą wypłat równowagowych w grze (X, Y, w_1, w_2) nazywamy parę postaci $(w_1(x^*, y^*), w_2(x^*, y^*))$ gdzie (x^*, y^*) jest równowagą Nasha w grze (X, Y, w_1, w_2).

Definicja

Wypłatą równowagową w grze o sumie zerowej (X, Y, w) nazywamy wielkość postaci $w(x^*, y^*)$ gdzie (x^*, y^*) jest parą strategii optymalnych w grze (X, Y, w).

Definicja

Dolną wartość gry o sumie zerowej (X, Y, w) nazywamy:

$$\underline{w} := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} w(x, y).$$

Górną wartość gry o sumie zerowej (X, Y, w) nazywamy:

$$\overline{w} := \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} w(x, y).$$

Jeśli dolna i górna wartość gry pokrywają się, $\underline{w} = \overline{w} := w^*$, to ich wspólną wartość nazywamy **wartością gry**.

Jak rozwiązać grę o sumie niezerowej

Fakt

Dla gry o sumie zerowej (X, Y, w) zachodzi $\underline{w} \leq \overline{w}$.

Dowód

Jest identyczny jak w grze macierzowej.

Gra o sumie zerowej

Twierdzenie

(x^*, y^*) jest parą strategii optymalnych (równowagą Nasha) w grze o sumie zerowej (X, Y, w) wtedy i tylko wtedy gdy

$$w(x^*, y) \leq w(x^*, y^*) \leq w(x, y^*), \quad \text{dla wszystkich } (x, y) \in X \times Y,$$

czyli jest punktem siodłowym funkcji w.

Dowód

Jest identyczny jak w grze macierzowej.

Twierdzenie

W grze o sumie zerowej (X, Y, w) istnieje jest para strategii optymalnych wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wartość gry

$$w^* = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} w(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} w(x, y).$$

Ponadto, dla dowolnej pary strategii optymalnych, (x^*, y^*), zachodzi $w^* = w(x^*, y^*)$.

Dowód

Jest identyczny jak w grze macierzowej.

Gra o sumie zerowej

Uwaga

Jeśli (x^*, y^*) i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ są parami strategii optymalnych (równowagą Nasha) w grze o sumie zerowej (X, Y, w) to

$$w(x^*, y^*) = w(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Gra o sumie zerowej

Uwaga

W przypadku gier o sumie niezerowej, dwie równowagi mogą wygenerować różne pary strategii optymalnych. Przykładowo w grze dwumacierzowej jastrząb-gołąb o macierzach

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -25 & 50 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -25 & 0 \\ 50 & 15 \end{bmatrix}.$$

mamy dwie czyste równowagi $(1,2)$ i $(2,1)$ dają wypłaty równowagowe odpowiednio $(50,0)$ i $(0,50)$.

Jak rozwiązać grę o sumie niezerowej

Uwagi

Własności równowagi Nasha:

- (x^*, y^*) jest równowagą Nasha wtedy i tylko wtedy gdy $x^* \in BR_1(y^*)$ oraz $y^* \in BR_2(x^*)$, lub równoważnie $(x^*, y^*) \in BR_1(y^*) \times BR_2(x^*)$;
- Jeśli (x^*, y^*) i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ są równowagami Nasha w grze o sumie zerowej, to ich pary wypłat są równe:

$$w_1(x^*, y^*) = w_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \text{oraz} \quad w_2(x^*, y^*) = w_2(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

pamiętając, że $w_2 = -w_1$.

Przykład

Rozpatrzmy grę zaangażowania we wspólny projekt postaci (X, Y, w_1, w_2), gdzie $X = Y = [0, \infty)$ oraz

$$w_1(x, y) = xy - x^3, \quad \text{oraz} \quad w_2(x, y) = xy - y^3.$$

Znajdź równowagi Nasha i ich wypłaty równowagowe.

Przykład

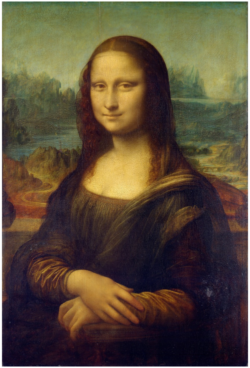
Rozwiązanie

Ponieważ $x \in X \mapsto w_1(x,y)$ jest wklęsła, oraz $y \in Y \mapsto w_2(x,y)$ jest wklęsła, stąd $BR_1(y)$ i $BR_2(x)$ wyznaczymy z układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x} = y - 3x^2 = 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} = x - 3y^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2, \\ x - 3^3x^4 = 0. \end{cases}$$

Układ ma dwa rozwiązania $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ oraz $(x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Są to równowagi Nasha o parach wypłat $(0,0)$ i odpowiednio $\left(\frac{2}{27}, \frac{2}{27}\right)$.

Przykład-aukcja, licytacja ceny obrazów.



Przykład

Przykład

Inwestorzy 1 i 2 biorą udział w licytacji obrazu który później zamierzają sprzedać innemu kolekcjonerowi dzieł sztuki za umówioną cenę 10.000 PLN. Jeśli inwestor 1 zlicytuje x, a inwestor 2 y, to wypłata inwestora 1 to $w_1(x,y)$, a wypłata inwestora 2 to $w_2(x,y)$, gdzie

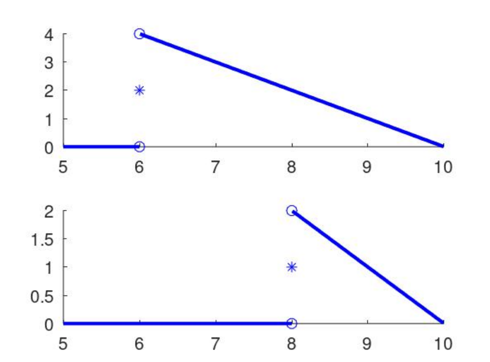
$$w_1(x,y) = \begin{cases} 10.000 - x & dla \quad x > y \\ 5000 - \frac{1}{2}x & dla \quad y = x \\ 0 & dla \quad y < x, \end{cases}$$

$$w_2(x,y) = \begin{cases} 10.000 - y & dla \quad x < y \\ 5000 - \frac{1}{2}y & dla \quad y = x \\ 0 & dla \quad y > x. \end{cases}$$

Znajdź równowagi Nasha, gdy cena wywoławcza to 5000?

Przykład

Rozwiązanie C.D.



Rysunek: Przykładowe wykresy funkcji wypłat w zależności od oferty inwestora 1, gdy przeciwnik oferuje 6 tys. i odpowiednio 8 tys. za obraz. Skala na obu osiach 1000 PLN.

Przykład

Rozwiązanie C.D.

Inwestorzy nie zaproponują ceny większej niż 10.000 PLN, stąd można przyjąć $X = Y = [5000, 10000]$. Zauważmy, że

$$BR_1(y) = \begin{cases} \emptyset & \textit{dla} \quad y < 100000 \\ [5000, 10000] & \textit{dla} \quad y = 10000 \end{cases}$$

$$BR_2(x) = \begin{cases} \emptyset & \textit{dla} \quad x < 100000 \\ [5000, 10000] & \textit{dla} \quad x = 10000 \end{cases}$$

zatem $(10000, 10000)$ jest jedyną równowagą Nasha i daje wypłatę $(0, 0)$.