Gry kooperacyjne-imputacje i rdzeń

23 stycznia 2025

Gra kooperacyjna

Przykład

Trzech siłaczy chce podnieść samochód. Jeden nie da rady. Dwóch podnienie tylko przednią oś. Ale cały samochód przeniosą wszyscy. Nie ma pola do rywalizacji jak dotychczas. Jaka zmierzyć ich siłę?

- Pojedynczo, nic nie podniosą: $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{4\}) = 0$;
- Dwóch odniosą połowiczny sukces, bo podniosą oś: $\nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) = \nu(\{2,4\}) = \nu(\{3,4\}) = 1/2$;
- Trzech, również podniosą oś:
$$\nu(\{1,2,3\}) = \nu(\{1,2,4\}) = \nu(\{1,3,4\}) = \nu(\{2,3,4\}) = 1/2.$$
- Czterech, podniesie cały samochód:
$$\nu(\{1,2,3,4\} = 1.$$

Gra kooperacyjna

Przykład-podział dolara

Adam, Ben i Charlie znaleźli w parku dolara. Mają zaproponować jego podział. O akceptacji podziału decyduje demokratyczne głosowanie.

- Będą chcieli wziąć tylko dla siebie, nic nie otrzymają:

$$\nu(\{A\}) = \nu(\{B\}) = \nu(\{C\}) = 0;$$

- Wystarczy, że wejdą w koalicje z kimkolwiek, dolar jest ich:

$$\nu(\{A, B\}) = \nu(\{B, C\}) = \nu(\{A, C\}) = 1;$$

  Łatwo się domyślić, że demokratyczna większość bierze wszystko i między sobą podzieli dolara.

- Podobnie jeśli się dogadają:

$$\nu(\{A, B, C\}) = 1.$$

Podział dolara

Gra kooperacyjna-Koalicja i co dalej (jak dramat Wyspiańskiego.)

Postacie:

- **Adam** - rozsądny, proponuje sprawiedliwe rozwiązania.
- **Ben** - przebiegły, kieruje się korzyścią własną.
- **Charlie** - uległy, ale skrycie knujący.

Miejsce akcji: Park, ławka, na której leży dolar.

Gra kooperacyjna-negocjacje (dramat Wyspiańskiego.)

Scena 1 - Znalezienie dolara *(Adam, Ben i Charlie stoją nad dolarem leżącym na ławce.)*

Adam: Patrzcie, dolar! Znalazł się skarb, ale pytanie - jak go podzielić?

Proponuję: po równo. Jeden dolar, trzy osoby, więc każdy dostanie jedną trzecią.
Ben: Po równo? A cóż to za równość, gdy jedni mają większe potrzeby, a inni mniejsze?
(Prostując się i spoglądając na Charliego.)
Charlie, co ty na to? Ty i ja - pół na pół, co? Adam to zrozumie.
Charlie: *(Rozgląda się niepewnie, potem kiwając głową.)*
Hm... Może i racja. No dobrze, Ben. Po połowie.

Gra kooperacyjna-negocjacje (dramat Wyspiańskiego.)

Adam: *(Aż się prostuje z oburzeniem.)*
Ha! A to sprawiedliwo'sć według was? Charlie, posłuchaj. Zróbmy inaczej.
Ja wezmę 40%, a ty, jako człowiek cierpliwy, 60%. Ben i tak tylko knuje.
Charlie: *(Po chwili milczenia, z uśmiechem.)*
Brzmi to... uczciwie. Dobrze, Adamie.

Podział dolara-negocjacje

Scena 2 - Ben knuje dalej *(Ben wychodzi na chwilę na bok z Adamem, szepcząc.)*

Ben:
Adam, słuchaj. Co my będziemy się z Charliem dzielić? On i tak zgadza się na wszystko.
Ty i ja - po połowie, a Charlie niech zostanie z niczym.
Adam:
(Milczy chwilę, spoglądając na dolara, po czym kiwa głową.)
Dobrze, Ben. Ty i ja - po połowie.

Scena 3 - Charliego ostatnie słowo *(Charlie nagle przerywa ich rozmowę.)*

Charlie:
Czekajcie! Nie bądźcie zbyt pochopni. Może jednak podzielimy się inaczej?
(Zapada cisza. Adam i Ben spoglądają na niego podejrzliwie. Charlie wyciąga rękę w stronę dolara, uśmiechając się tajemniczo.)
Kurtyna opada. Zakończenie otwarte.

Gra kooperacyjna

Przykład-piraci

Piraci na statku znaleźli kufer z n skarbami (one są niepodzielne). Podział licytują *kapitan*, *bosman* i *marynarz*.

- Najstarszy rangą pirat proponuje podział kufra i następuje demokratyczne głosowanie. Podział nastąpi jeśli co najmniej połowa piratów (łącznie z mediatorem) przychyli się do podziału.
- Jeśli nie, kolejny najstarszy pirat proponuje podział, a dotychczasowy mediator traci prawo głosu.

Przykład-piraci C.D.

Oto analiza możliwości poszczególnych graczy:

- Nawet kapitan musi się z kimś dogadać:

$$\nu(\{K\}) = \nu(\{B\}) = \nu(\{M\}) = 0.$$

- Każda koalicja daje pełną nagrodę:

$$\nu(\{K, B\}) = \nu(\{B, M\}) = \nu(\{K, M\}) = n;$$

- Podobnie jeśli się cała trójka dogada:

$$\nu(\{K, B, M\}) = n.$$

Przypomina podział dolara, ale są subtelne różnice.

Podział dolara

Scena teatralna

Postacie:

- **Kapitan**: Doświadczony dowódca, pewny siebie, ale też lekko arogancki.
- **Bosman**: Ambitny i przebiegły, gotów posunąć się daleko, by osiągnąć swoje cele.
- **Marynarz**: Młody, lojalny, ale nieco naiwny. Rozdarty między autorytetem a instynktem samozachowawczym.

Scena: *Pokład statku na pełnym morzu. W tle słychać szum fal. Na środku sceny skrzynia, w której ukryte są skarby. Kapitan stoi obok niej, Bosman przechadza się niespokojnie, a Marynarz stoi z boku, trzymając linę.*

Kapitan: *(patrzy na Marynarza)* Słuchaj, chłopcze. Skrzynia jest nasza, ale ja decyduję, jak ją podzielimy. Ty weźmiesz jeden skarb, a reszta należy do mnie. *(pauza, patrzy na Bosmana)* Bosmana pominiemy.
Bosman: *(gwałtownie)* Co? Pominiemy?! Ja tu haruję jak wszyscy inni! Nie pozwolę się tak traktować, kapitanie!
Kapitan: *(zimno)* To nie demokracja, Bosmanie. Ja tu rządzę.
Bosman: *(zaciska pięści)* Może czas to zmienić.
Kapitan: *(unosząc głos)* Uważaj na słowa! Nie zapominaj, kto jest kapitanem tego statku!

Gra kooperacyjna-negocjacje piratów

Bosman: *(zwraca się do Marynarza, konspiracyjnym tonem)* Słuchaj, młody. Ten stary tyran chce nas wykiwać. Zróbmy to razem. Zakneblujemy go, a skarb podzielimy na pół. Pół dla mnie, pół dla ciebie. Co ty na to?
Marynarz: *(z wahaniem)* A jeśli mnie oszukasz? Co, jeśli weźmiesz wszystko, a ja zostanę z niczym?
Bosman: *(przysięgając)* Nigdy bym tego nie zrobił! Zaufaj mi, młody, razem damy radę.
Marynarz: *(patrzy na Kapitana, potem na Bosmana, z wahaniem)* Nie... Nie mogę. Jeśli zdradzimy kapitana, kto powstrzyma ciebie przed zdradzeniem mnie?

Bosman: *(gniewnie)* Ty tchórzu! Stracisz jedyną szansę na lepsze życie!
Kapitan: *(z triumfem)* Dobrze, że masz rozum, chłopcze. Pamiętaj, lojalność zawsze popłaca. *(odwraca się do Bosmana)* A ty, Bosmanie, za bunt odpowiesz. Do kajuty z nim!
Marynarz: *(do siebie, z nutą smutku)* A może jednak lojalność ma swoją cenę...
Bosman: *(odprowadzany przez Marynarza, z ironią)* Zobaczymy, młody, czy lojalność cię nakarmi, kiedy nadejdzie burza...

Kurtyna.

Model matematyczny

Gra koalicyjna to para (N, ν) postaci:

- $N := \{1, 2, ..., n\}$ zbiór graczy;
- 2^N jest zbiorem koalicji i każdy $S \subset N$ jest koalicją:
  - $\emptyset$ jest pustą koalicją;
  - N jest *Wielką Koalicją*;
- $\nu : 2^N \mapsto \mathbb{R}$, gdzie $\nu(\emptyset) = 0$ jest nazywana *funkcją charakterystyczną*.

Interpretacja

Dla koalicji $S \subset N$, $\nu(S)$ oznacza wielkość jaką współpracujący ze sobą gracze ze zbioru S mogą osiągnąć razem.

Model matematyczny

Uwaga

Często zakładamy, że gra (N, ν) jest superaddytywna, zatem dla dowolnych koalicji $S_1 \subset N$ i $S_2 \subset N$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$,

$$\nu(S_1 \cup S_2) \geq \nu(S_1) + \nu(S_2),$$

zatem łączenie koalicji nigdy nie zaszkodzi.

Dygresja

W życiu nie każda gra zyskuje na współpracy - małżonka narcyza prędzej poczuje gorycz, niż radość z wejścia z nim w małżeńską koalicję. To przykład gry która nie jest superaddytywna.

Model matematyczny

Uwaga

Przykład podziału dolara i piratów pokazuje, że jedna gra kooperacyjna (N, ν) reprezentuje wiele różnych modeli

- Przyjaciele w podziale dolara nie są w stanie dogadać się co do podziału;
- Piraci szybko dogadali się do podziału, bo uczestnicy różnili się przywilejami.

Model matematyczny

- Jak podzielić wypłaty między graczami;
- Jak sformalizować ich siłę i wkład w potencjalną koalicję;
- Zatem jak ustalić wektor podziału wypłat $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mając na względzie różne możliwości wejścia w koalicje:

Definicje

Definicja

Podział wypłat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywamy <u>alokacją</u> jeśli spełnia zasadę efektywności:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(N),$$

oraz $x_i \geq 0$ dla wszystkich $i = 1, 2, ..., n$.

Definicja

Podział wypłat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywamy <u>imputacją</u> jeśli spełnia poniższe zasady:

- **Efektywność:** $\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(N)$;
- **Indywidualna racjonalność:** $x_i \geq \nu(\{i\})$ dla wszystkich i.

Uwaga o imputacji

Jeśli gracze tworzą Wielką Koalicję i podział będzie imputacją to

- Pojedynczy gracz nie wyjdzie z Wielkiej Koalicji jeśli podział będzie imputacją: w podziale dolara, przyjaciele odbijali się między różnymi imputacjami, lecz parami wychodzili z wcześniejszych koalicji;
- Grupa graczy może wyjść z koalicji i stworzyć mniejsze: w podziale dolara, dwie osoby zrywały wcześniejsze warunki;
- W sensie indywidualnej racjonalności, Imputacja przypomina **równowagę Nasha**;
- A co zrobić, żeby nie tworzyły się mniejsze koalicje?

Definicje

Definicja

Rdzeniem nazywamy zbiór imputacji $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ dla których

$$\nu(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$$

Twierdzenie

Twierdzenie

Niech (N, ν) będzie grą i załóżmy, że rdzeń jest niepusty. Niech $S \subset N$. Jeśli $S = \{i_1, ..., i_k\}$ to nie istnieje żaden podział dobra, $(x'_{i_1}, x'_{i_2}, ..., x'_{i_k})$ taka, że

- $x'_{i_1} + x'_{i_2} + \ldots + x'_{i_k} = \nu(S)$;
- oraz $x'_{i_j} \geq x_{i_j}$ dla wszystkich $j = 1, ..., k$ oraz $x'_{i_{j_0}} > x_{i_{j_0}}$.

Uwaga

Innymi słowy, Nie ma koalicji właściwej $S \subset N$ dla której nikt nie straci, a jeden z uczestników zyska.

Twierdzenie

Dowód

Niech $(x_1, x_2, ..., x_n)$ należy do rdzenia. Weźmy (nie wprost) dowolną imputację wewnątrz koalicji $S = \{i_1, ..., i_k\}$, $(x'_{i_1}, ..., x'_{i_k})$ dla której

$$x'_{i_1} + x'_{i_2} + \ldots + x'_{i_k} = \nu(S),$$

oraz $x_{i_j} \leq x'_{i_j}$ dla $j = 1, 2, ..., k$ oraz $x_{i_k} < x'_{i_k}$ (bez straty ogólności).

Dowód

Z warunku rdzenia jednak

$$\nu(S) \leq x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k};$$

oraz z poprzedniego slajdu

$$x'_{i_1} + x'_{i_2} + \ldots + x'_{i_k} = \nu(S).$$

Stąd

$$x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k} \geq x'_{i_1} + x'_{i_2} + \ldots + x'_{i_k}.$$

To przeczy warunkowi, że $x_{i_j} \leq x'_{i_j}$ dla $j = 1, 2, ..., k$ oraz $x_{i_k} < x'_{i_k}$.

Uwaga

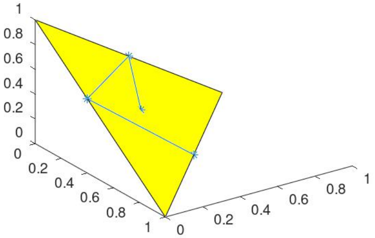
Gdy funkcję charakterystyczną gry piratów podzielimy przez n, gra będzie miała identyczną funkcję charakterystyczną $\nu(\cdot)$. Są jednak subtelne różnice w okolicznościach.

- Adam, Bob i Charlie są równorzędnymi graczami i ciężko było im wymusić stabilną imputację; **Każda koalicja była tak samo wykonalna.**
- Przywilej kapitana spowodował, że mógł wymusić korzystną dla siebie imputację, a bosmana przywilej w pewnym sensie zgubił. **Koalicja bosmana z marynarzem była niewykonalna.**

Przykład

- **Imputacje:** ponieważ w obu przypadkach $\nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 0$ i $\nu(1,2,3) = 1$ podział dolara i piraci mają te same imputacje, które obejmują zbiór
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$
- Rdzeń jest pusty: gdyby tak nie było to
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & \nu(1,2,3) = 1 \\ x_1 + x_2 & \geq & \nu(1,2) = 1, \\ x_2 + x_3 & \geq & \nu(2,3) = 1, \\ x_1 + x_3 & \geq & \nu(1,3) = 1 \\ x_1 \geq \nu(1) = 0, \\ x_2 \geq \nu(2), \\ x_3 \geq \nu(3) = 0. \end{cases}$$
Dodając stronami drugą, trzecią i czwartą nierówność i dzieląc stronami mamy $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$ co przeczy pierwszemu równaniu. Rdzeń jest pusty.

Przykład - podział dolara



Żółty trójkąt to zbiór imputacji, a Adam, Ben i Charlie wędrowali po trójkącie odbijając się od ściany do ściany.

Przykład

W czasie katastrofy na w ratowanie ludzi angażuje się 3 ratowników: medyk M, kierowca K i inżynier I. Ich celem jest uratować jak najwięcej osób. Funkcja charakterystyczna koalicji ma postać tabelki:

	Ile osób ocali
M	10
K	5
I	8
MK	20
KI	25
KI	15
MKI	35

Przykład

Zatem szukając rdzenia zapewnimy alokację spełniającą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 35 & \\ x_1 + x_2 \geq 20 & \text{dodaje stronami } x_3 \\ x_2 + x_3 \geq 25 & \text{dodaje stronami } x_1 \\ & \\ x_1 + x_3 \geq 15 & \text{dodaje stronami } x_2 \\ & \\ x_1 \geq 10 & \\ x_2 \geq 5 & \\ x_3 \geq 8. & \end{cases}$$

Korzystając z równania pierwszego, drugie trzecie i czwarte równanie ma postać

$$35 \geq x_3 + 20$$

$$35 \geq x_2 + 25$$

$$35 \geq x_1 + 15$$

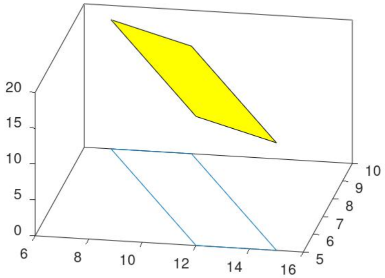
Przykład

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 35 \\ 10 \leq x_1 \leq 20 \\ 5 \leq x_2 \leq 10 \\ 8 \leq x_3 \leq 15. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 35 \\ 10 \leq x_1 \leq 20 \\ 5 \leq x_2 \leq 10 \\ 8 \leq 35 - x_1 - x_2 \leq 15. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 35 \\ 10 \leq x_1 \leq 20 \\ 5 \leq x_2 \leq 10 \\ 17 \leq x_1 + x_2 \leq 20. \end{cases}$$

Przykład



Rdzeń to wycinek płaszczyzny o równaniu $x_1 + x_2 + x_3 = 35$, którem rzutem na (x_1, x_2) jest równoległobok o bokach $(7, 10), (12, 5), (15, 5), (10, 10)$.