

Gry o sumie niezerowej

4 listopada 2024

Gra o sumie niezerowej jest zdefiniowana w następujący sposób:

- **Gracz 1** ma do wyboru m możliwych strategii, które ponumerujemy $X := \{1, 2, \dots, m\}$;
- **Gracz 2** ma do wyboru n możliwych strategii, które ponumerujemy $Y := \{1, 2, \dots, n\}$;
- **Gracz 1** wybiera strategię $i \in X$, a **gracz 2** $j \in Y$;
- W zależności od strategii i dla **gracza 1** i j dla **gracza 2**, **gracz 1** otrzymuje wypłatę a_{ij} , a **gracz 2** otrzymuje b_{ij} gdzie a_{ij} jest elementem \mathbb{A} , **macierzą wypłat** dla **gracza 1**, a b_{ij} jest elementem \mathbb{B} , **macierzą wypłat** dla **gracza 2**:

- Macierz wypłat dla **gracza 1**:

$$\begin{array}{c} \text{Wyb\u00f3r gracza 1} \\ \mathbb{A} = \end{array} \begin{array}{c} \text{Wyb\u00f3r gracza 2} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

- Macierz wypłat dla **gracza 2**:

$$\begin{array}{c} \text{Wyb\u00f3r gracza 1} \\ \mathbb{B} = \end{array} \begin{array}{c} \text{Wyb\u00f3r gracza 2} \\ \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

- Gr\u0119 o sumie niezerowej mo\u017cna zdefiniowa\u0107 przy pomocy dw\u00f3ch macierzy tego samego rozmiaru, wi\u0119c b\u0119dziemy nazywa\u0107 j\u0105 gr\u0119 dwumacierzow\u0105.

Uwaga

- **Gracz 1** i **gracz 2** znają swoje zbiory strategii i zbiory strategii przeciwnika, oraz cele przeciwnika;
- Obaj gracze czynnie uczestnią w grze, przy czym ich cele są nie muszą być przeciwstawne, ale nie są zbieżne. **Gracz 1** stara się maksymalizować wypłatę z macierzy \mathbb{A} , a **gracz 2**, maksymalizować wypłatę z macierzy \mathbb{B} .
- Grę o sumie niezerowej to szczególny przypadek gry o sumie niezerowej, gdy $\mathbb{B} = -\mathbb{A}$;

Definicja-dominacja strategii

- Dla gracza 1, Strategia i_1 **dominuje** strategię i_2 jeśli

$$a_{i_1,j} \geq a_{i_2,j} \text{ dla wszystkich } j = 1, 2, \dots, n$$

oraz

$$a_{i_1,j_0} > a_{i_2,j_0} \text{ dla pewnego } j_0 = 1, 2, \dots, n.$$

- Dla gracza 2, Strategia j_1 **dominuje** strategię j_2 jeśli

$$b_{i,j_1} \geq b_{i,j_2} \text{ dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, m$$

oraz

$$b_{i_0,j_1} > b_{i_0,j_2} \text{ dla pewnego } i_0 = 1, 2, \dots, m.$$

Strategie, które nie są zdominowane przez żadne inne nazywamy **Pareto-optymalnymi**.

Uwagi o dominacji strategii

- Zarówno gracz 1 i gracz 2 nigdy nie wybierze strategii zdominowanej przez jakąkolwiek inną. Oboje wybiorą strategie *Pareto-optymalne* dla siebie;
- Ponieważ każdy gracz domyśla się, że przeciwnik nie wybierze strategii zdominowanej przez jakąkolwiek inną, więc będzie eliminował poszczególne warianty.

Przykład

Pan Antek i pan Broniek grają w grę o sumie niezerowej z macierzami wypłat

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład C.D

- Pan Antek skreśla strategie zdominowane:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \emptyset & \cancel{1} \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- Pan Broniek skreśla swoje strategie zdominowane:

$$B = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 3 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 0 & 2 & \cancel{1} \\ \emptyset & 0 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix}.$$

- Rywale domyślają się, że przeciwnicy nie będą stosować strategii zdominowanych.

Przykład-C.D.

- Pan Antek skreśla również strategie zdominowane przeciwnika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- Pan Broniek skreśla swoje strategie zdominowane przeciwnika:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Rywale domyślają się, że przeciwnicy nie będą stosować strategii zdominowanych, więc gra się uprościła.

Przykład-C.D.

- Pan Antek ma macierz postaci:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & 2 & 3 & X \\ X & 0 & 0 & X \end{bmatrix};$$

- Pan Broniek ma macierz postaci:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & 0 & 2 & X \\ X & 0 & 1 & X \end{bmatrix}.$$

- Rywale domyślają się, że przeciwnicy nie będą stosować strategii zdominowanych, więc gra się uprościła. Można ją jeszcze bardziej uprościć.

Przykład

- Pan Antek skreśla swoje strategie zdominowane w uproszczonej podgrze:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & 2 & 3 & X \\ X & \emptyset & \emptyset & X \end{bmatrix};$$

- skreśla swoje strategie zdominowane w uproszczonej podgrze:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & \emptyset & 2 & X \\ X & \emptyset & 1 & X \end{bmatrix}.$$

- Rywale domyślają się, że przeciwnicy nie będą stosować strategii zdominowanych, więc gra się zdegenerowała.

Przykład

- Pan Antek ma zdegenerowaną macierz gry:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & 3 & X \\ X & X & X & X \end{bmatrix};$$

Wybierze wiersz nr 2 i wie, że rywal wybierze kolumnę nr 3 i otrzyma wtedy 3.

- Pan Broniek ma zdegenerowaną macierz gry:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & 2 & X \\ X & X & X & X \end{bmatrix}.$$

Wybierze kolumnę nr 3 i wie, że rywal wybierze wiersz nr 2 i otrzyma wtedy 2.

Przykład

Pan Antoni i pan Bronek grają w grę dwumacierzową o macierzy wypłat \mathbb{A} i odpowiednio \mathbb{B} , gdzie

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pan Antoni zignorował macierz rywala i zachował się jak w grze o sumie zerowej. Zatem wybrał wiersz nr 1, który daje mu 1.
- Pan Bronek jednak zaczął eliminować swoje strategie zdominowane i wykluczył strategię nr 1 i 3, więc rozważa tylko strategię nr 2 i 4.

Przykład C.D.

Pan Bronek wybierze więc albo 2 albo 4, więc pan Antoni wybrał najgorszą możliwą strategię:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

W grze o sumie niezerowej nie należy więc zakładać, że przeciwnik będzie nastawiony antagonistycznie. Przeciwnik dąży do maksymalizacji własnych zysków, a te czasami są możliwe do pogodzenia.

Przykład C.D.

Pan Antoni nic nie skreśla, ale pan Broniek skreśla strategię 1 i 3:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & \cancel{1} & 1 \\ \cancel{1} & 2 & \emptyset & 3 \\ \cancel{2} & 2 & \cancel{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Tym razem pan Antoni jest wiadomy potencjalnego wyboru pana Bronka.

Przykład

Tym razem pan Antoni jest wiadomy potencjalnego wyboru pana Bronka i bierze to pod uwagę:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 1 & \cancel{1} & 1 \\ \emptyset & 2 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{2} & 3 & \emptyset & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & \cancel{1} & 1 \\ \cancel{1} & 2 & \emptyset & 3 \\ \cancel{2} & 2 & \cancel{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Teraz pan Antoni skreśla wiersz 1 i 2, więc pan Broniek bierze to pod uwagę.

Przykład

Gra ma uproszczoną postać:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pan Bronek skreśli więc strategię nr 4, więc gra jest zdegenerowana.

Przykład

Gra ma uproszczoną postać:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pan Antoni wybierze więc strategię nr 3 i otrzyma 3, a pan Broniek wybierze strategię nr 2 i otrzyma 2.

Rozszerzona gra o sumie niezerowej

- Rozpatrzmy grę o sumie niezerowej o macierzach $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- Przypuśćmy, że gracze mogą wybierać strategię losowo, zatem:

- Zbiór strategii dla gracza 1:

$$I := \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m : \mu_i \geq 0, \text{ dla wszystkich } i, \text{ oraz } \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\},$$

- Zbiór strategii dla gracza 2:

$$J := \{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n : \nu_j \geq 0, \text{ dla wszystkich } j, \text{ oraz } \sum_{j=1}^n \nu_j = 1\}.$$

- Gdy gracz 1 wybierze $\mu \in I$ i gracz 2 wybierze $\nu \in J$, wtedy oczekiwana wypłata dla gracza 1 i odpowiednio gracza 2 wynosi:

$$w_1(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_i \nu_j, \quad \text{oraz} \quad w_2(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \mu_i \nu_j.$$

- Powyższą grę nazywamy **grą rozszerzoną**.

Definicja

Strategie postaci

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{\text{i-ta pozycja} \\ \text{m współrzędnych}}}, 0, \dots, 0) \in I,$$

oraz

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{\text{j-ta pozycja} \\ \text{n współrzędnych}}}, 0, \dots, 0) \in J,$$

nazywamy **strategiami czystymi**. Pozostałe strategie nazywamy **strategiami zrandomizowanymi**. Strategie czyste i zrandomizowane nazywamy ogólnie **strategiami mieszanymi**.

Oznaczenie

Tak jak w grach o sumie zerowej mamy utożsamienia

$$i \in \{1, 2, \dots, m\} \mapsto e_i \in I \quad \text{oraz} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \mapsto e_j \in J$$

w związku z tym oznaczamy

$$w_1(i, \mu) := w_1(e_i, \nu) \quad \text{oraz} \quad w_2(\mu, j) := w_2(\mu, e_j).$$

Definicja-operator "argmax"

Dla funkcji $f : X \mapsto \mathbb{R}$ definiujemy

$$\arg \max_{x \in X} f(x) := \{x \in X : f(x) \geq f(x'), \text{ dla wszystkich } x' \in X\}.$$

Twierdzenie o zwartości "argmax"

Jeśli X jest zwartym podzbiorem pewnej przestrzeni topologicznej, a $f : X \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\arg \max_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$$

i jest to również zbiór zwarty;

Dowód gdy (X, d) jest przestrzenią metryczną zwartą

Jest to Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

Pokażemy, że $f(x)$ jest ograniczona na X .

- Załóżmy, że tak nie jest i istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ z X dla którego $f(x_n) > n$ dla wszystkich n ;
- Ale X jest przestrzenią metryczną zwartą, stąd wybierzemy podciąg zbieżny $x_{n_k} \rightarrow x^*$ dla $k \rightarrow \infty$;
- Z ciągłości z jednej strony $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x^*)$, a z drugiej strony $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$, co oznacza, że $f(x^*) = \infty$, co jest niemożliwe;
- Zatem f jest ograniczona.

Dowód C.D.

Pokażemy, że $f(x)$ osiąga maksimum na X .

- Załóżmy, że tak nie jest i niech $M = \sup_{x \in X} f(x)$ i $f(x) < M$ dla wszystkich $x \in X$;
- Wtedy $\phi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ jest również ciągła, więc z poprzedniej części, ograniczona przez pewną liczbę K , czyli

$$\phi(x) \leq K$$

dla wszystkich $x \in X$.

Dowód C.D.

- Po przekształceniach, daje to jednak

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \text{ dla wszystkich } x \in X;$$

- Przeczy to założeniu, że M jest supremum f (najmniejsze ograniczenie funkcji f z góry), czyli $M = f(x^*)$ dla pewnego $x^* \in X$.

Dowód C.D.

Pokazaliśmy zatem, że $\arg \max_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$. Wykażemy, że jest to zbiór zwarty.

- Ze zwartości (X, d) , wystarczy wykazać, że $\arg \max_{x \in X} f(x)$ jest domkniętym podzbiorem X ;
- Załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem elementów z $\arg \max_{x \in X} f(x)$, oraz $x_n \rightarrow x^*$;
- Zatem dla dowolnego $x' \in X$, $f(x_n) \geq f(x')$, a po przejściu do granicy z $n \rightarrow \infty$, $f(x^*) \geq f(x')$;
- Ponieważ x' jest dowolny, $x^* \in \arg \max_{x \in X} f(x)$ zatem $\arg \max_{x \in X} f(x)$ jest zbiorem domkniętym, a więc i zwartym podzbiorem X .

Twierdzenie o wypukłości "argmax"

Jeśli X jest wypukłym podzbiorem pewnej przestrzeni liniowej, a $f : X \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to $\arg \max_{x \in X} f(x)$ jest również zbiorem wypukłym.

Dowód

- Jeśli $\arg \max_{x \in X} f(x) = \emptyset$, wtedy oczywiście jest wypukły, więc założmy, że $\arg \max_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$ i wybierzmy z $\arg \max_{x \in X} f(x)$ dwa elementy x_1, x_2 oraz liczbę $\alpha \in (0, 1)$;
- Weźmy dowolny element $x' \in X$. Wtedy $f(x_1) \geq f(x')$ oraz $f(x_2) \geq f(x')$;
- Z wklęsłości f mamy:

$$\begin{aligned} f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) &\geq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \\ &\geq (1 - \alpha)f(x') + \alpha f(x') = f(x'); \end{aligned}$$

- Z dowolności $x' \in X$, $(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in \arg \max_{x \in X} f(x)$;
- Zatem $\arg \max_{x \in X} f(x)$ jest wypukły.

Definicja- funkcja najlepszych odpowiedzi

Dla wszystkich $\mu \in I$ oraz $\nu \in J$ definiujemy **funkcję najlepszych odpowiedzi** dla gracza 1 jako

$$BR_1(\nu) := \arg \max_{\mu' \in I} w_1(\mu', \nu)$$

i dla gracza 2 jako

$$BR_2(\mu) := \arg \max_{\nu' \in J} w_2(\mu, \nu').$$

Pamiętając o identyfikacji

$$i \in \{1, 2, \dots, m\} \mapsto e_i \in I,$$

oraz

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \mapsto e_j \in J,$$

sformułujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o nośniku

Niech $\mu \in I$ i $\nu \in J$. Zachodzą poniższe warunki:

- (i) $\mu \in BR_1(\nu)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich i , dla których $\mu_i > 0$ zachodzi $i \in BR_1(\nu)$;
- (ii) $\nu \in BR_2(\mu)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich j , dla których $\nu_j > 0$ zachodzi $j \in BR_2(\mu)$;

Dowód

Udowodnimy tylko (i), bo dowód dla (ii) jest identyczny.

- Niech $\mu \in BR_1(\nu)$ oraz $\mu_i > 0$. Wtedy

$$w_1(\mu, \nu) = \sum_{i'=1}^m \mu_{i'} w_1(i', \nu).$$

- Widać, że $w_1(i', \mu) = w_2(i'', \mu)$ o ile $\mu_{i'} > 0$ oraz $\mu_{i''} > 0$. Gdyby tak nie było i zaszło

$$w_1(i', \nu) < w_2(i'', \nu),$$

to mielibyśmy również

$$w_1(\mu, \nu) < w_1(\nu', \nu)$$

dla $\nu'_{i'} := 0$, $\nu'_{i''} := \nu_{i'} + \nu_{i''}$, $\nu'_i := \nu_i$ poza tym, co przeczyłoby założeniu $\mu \in BR_1(\nu)$;

- Zatem, jeśli $\mu_i > 0$ to

$$w_1(\mu, \nu) = w_1(i, \nu) = w_1(e_i, \nu), \quad \text{czyli } i \in BR_1(\nu).$$

Dowód C.D.

- Niech teraz z warunku $\mu_i > 0$ wynika $i \in BR_1(\nu)$.
- Wtedy dla i takich, że $\mu_i > 0$ zachodzi

$$w_1(i, \mu) = \max_{\mu \in I} w_2(\mu', \nu).$$

- Zatem

$$\begin{aligned} w_1(\mu, \nu) &= \sum_{i'=1}^m \mu_{i'} w_1(i', \nu) \\ &= \sum_{\mu_{i'} > 0} \mu_{i'} w_1(i', \nu) \\ &= \sum_{\mu_{i'} > 0} \mu_{i'} \max_{\mu \in I} w_2(\mu', \nu) \\ &= \max_{\mu \in I} w_2(\mu', \nu). \end{aligned}$$

- Czyli $\mu \in BR_1(\nu)$.

Definicja

Dla podzbioru A przestrzeni liniowej V $\text{conv}(A)$ nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający A .

Fakt

Niech $k, m \in \mathbb{N}$. Dla $V = \mathbb{R}^k$,

$$\text{conv}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}) = \left\{ \sum_{s=1}^m \alpha_s \vec{v}_s : \alpha_s \geq 0, \forall s=1,2,\dots,m, \sum_{s=1}^m \alpha_s = 1 \right\}.$$

Twierdzenie o postaci funkcji najlepszych odpowiedzi

Dla wszystkich $\mu \in I$ oraz $\nu \in J$ mamy

$$BR_1(\nu) = \text{conv}\{i = 1, \dots, m : i \in BR_1(\nu)\},$$

oraz

$$BR_2(\nu) = \text{conv}\{j = 1, \dots, n : j \in BR_2(\mu)\}.$$

Dowód

- Z twierdzenia o nośniku wiemy, że jeśli $\mu \in BR_1(\nu)$, to

$$w_1(\mu, \nu) = w_1(i, \nu)$$

dla wszystkich i dla których $i \in BR_1(\nu)$;

- Wiemy również, że jeśli $\mu_i > 0$ to $i \in BR_1(\nu)$;

$$BR_1(\nu) \subset \text{conv}\{i = 1, \dots, m : i \in BR_1(\nu)\};$$

- Sprawdzamy, że $\text{conv}\{i = 1, \dots, m : i \in BR_1(\nu)\} \subset BR_1(\nu)$.
- Zatem, weźmy dowolny $\mu' \in I$ dla którego zachodzi implikacja

$$\mu'_i > 0 \Rightarrow i \in BR_1(\nu).$$

Mamy więc:

$$w_1(\mu', \nu) = \sum_{i=1}^m \mu'_i w_1(i, \nu) = \sum_{i=1}^m \mu'_i w_1(\mu, \nu) = w_1(\mu, \nu).$$

Zatem $\mu' \in BR_1(\nu)$, czyli

$$\text{conv}\{i = 1, \dots, m : i \in BR_1(\nu)\} \subset BR_1(\nu).$$

Gdzie spędzić wakacje, na wsi, czy na plaży?



Rysunek: Wieś czy plaża?

Przykład-wojna płci

Statystycznie single wolą spędzać wakacje na plaży, a singielki na wsi. Jednak obie strony chciałyby spotkać wymarzonego partnera, rozważając wyjazd w mniej preferowane miejsce. Grę opiszemy w postaci dwumacierzowej:

Przykład C.D.

- Macierz wypłat dla singla:

Wybór **singla**: Wieś/Plaża

Wybór

singielki: Wieś/Plaża

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Macierz wypłat dla singielki:

Wybór **singla**: Wieś/Plaża

Wybór

singielki: Wieś/Plaża

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład C.D.

Przykładowo, gdy 90% singielek spędza czas na wsi i w 10% na plaży, co daje $\nu = (9/10, 1/10)$.

- Wyprawa na wieś daje singlowi oczekiwaną wypłatę postaci:

$$w_1(1, \nu) = 4 * \frac{9}{10} + 0 * \frac{1}{10} = 3.6,$$

- Wyprawa na plażę daje mu wypłatę:

$$w_1(2, \nu) = 0 * \frac{9}{10} + 5 * \frac{1}{10} = 0.5 < w_1(1, \nu),$$

czyli z postaci funkcji najlepszych odpowiedzi mamy $BR_1(\nu) = \{1\} = BR_1(\{\text{WIEŚ}\})$.

- Taki stan rzeczy nie potrwa zbyt długo, bo z czasem wszyscy single zrezygnują z pobytu na plaży na rzecz wsi, a singieli zostaną na wsi i na plaży nie będzie singli.
- Czy taki stan musi trwać? Zależy od stanu początkowego.

Przykład C.D.

Ile procent singielek spędzi czas na wsi, a ile na plaży, żeby singlom było obojętnie gdzie spędzą czas? Niech $\nu = (y, 1 - y)$.

- Poszukanie partnerki na wsi daje singlowi oczekiwaną wypłatę postaci:

$$w_1(1, \nu) = 4y,$$

- Poszukanie partnerki na plaży daje wypłatę:

$$w_1(2, \nu) = 5(1 - y);$$

Zatem dla $y = \frac{5}{9}$, co odpowiada $\nu = (\frac{5}{9}, \frac{4}{9})$, singlom będzie obojętnie, czy spędzą czas na plaży, czy na wsi;

- Zatem, gdy $\frac{5}{9} * 100\% \approx 55.6\%$ singielek spędzi czas na wsi, a pozostałe $\frac{4}{9} * 100\% \approx 44.5\%$ singielek na plaży, singlom będzie obojętnie gdzie spędzą czas.

Przykład C.D.

Ile procent chłopców spędzi czas na wsi, a ile na plaży, żeby singielkom było obojętnie gdzie spędzą czas. Niech $\mu = (x, 1 - x)$.

- Poszukiwanie partnera na wsi daje singielce oczekiwaną wypłatę postaci:

$$w_1(1, \nu) = 5x,$$

- Poszukiwanie partnera na plaży daje singielce oczekiwaną wypłatę postaci:

$$w_1(2, \nu) = 4(1 - x);$$

Zatem dla $x = \frac{4}{9}$, co odpowiada $\nu = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$, singielkom będzie obojętnie, czy spędzą czas na plaży, czy na wsi;

- Zatem, gdy $\frac{5}{9} * 100\% \approx 45.6\%$ singli spędzi czas na wsi, a pozostałe $\frac{4}{9} * 100\% \approx 44.4\%$ singli na plaży, singielkom będzie obojętnie gdzie spędzą czas.

Przykład C.D.

Podsumowanie w tabelce.

	Wypoczynek na wsi	Wypoczynek na plaży
Single	45.6%	55.4%
Singielki	55.4%	45.6%

- Ta sytuacja jest stabilna, bo ani single ani singielki nie mają zachęty, żeby zmienić swój sposób wypoczynku;
- Na plaży jest więcej singli niż singielek, co powoduje, że na plaży wielu singli zostanie bez pary;
- Na wsi jest więcej singielek niż singli, co powoduje, że na wsi wiele singielek zostanie bez pary;
- Wybór preferencji miejsca też ma znaczenie;
- W języku teorii gier, $\mu \in BR_1(\nu)$, $\nu \in BR_2(\mu)$, oraz

$$BR_1(\nu) = \text{conv}\{1, 2\}, \quad \text{oraz} \quad BR_2(\mu) = \text{conv}\{1, 2\}.$$